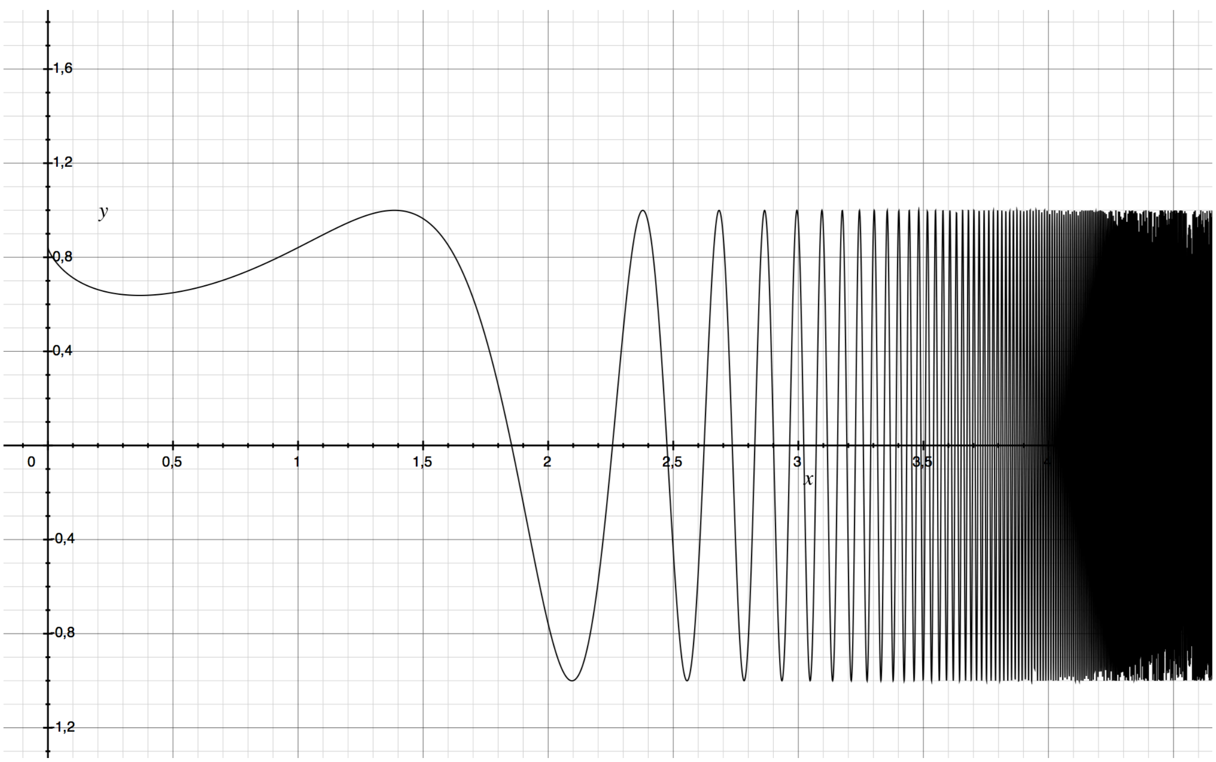
Analyse I

Louis Pelloud



1 Serie numerique

$a_1, a_2, a_3, ... \in \mathbb{R}$ *une suite* $a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1.1 Definition

Definition : *Si* $a_1, a_2, ... \in \mathbb{R}$ *est une suite, alors,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Proprietes :

— *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergent, alors :* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

— *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge et si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors :* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

— *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Preuve : *Si* $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, *alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n, \textit{ mais } a_n = S_n - S_{n-1}$$

Et donc : $\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 \quad \square$

$\rightsquigarrow$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge, meme si :* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque : *Si* $c_1, c_2, ... \in \mathbb{C}$ *est une suite et si* $c \in \mathbb{C}$, *alors on dit que :* $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ *ssi* $\lim_{n\to\infty} | c_n - c | = 0$ *Autrement dit, si :* $\begin{cases} c_n & = u_n + i * v_n \\ c & = u + i * v \end{cases}$ *on veut :*

$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v$

Exemples : *Serie geometrique*

Soit : $q \in \mathbb{C} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ...$

— *si* $| q | \geq 1$ *alors il n'est pas vraie que* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (car $| q^n | \geq 1$)

alors $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *diverge*

— *si* $| q | < 1$: "$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

Illustration : $q = \frac{1}{2}$

Definitions : *Soit* $a_1, a_2, ... \in \mathbb{C}$ *une suite*

On dit que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolument si* $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ *converge*

Theoreme *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convrge absolument, cad si :* $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ *converge, alors* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*

Preuve : *Rappel, une suite (cn) converge ssi elle est dite de Cauchy, cad :*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ n_0)(\forall m > n > n_0) \quad \mid c_m - c_n \mid < \varepsilon$$

posons : $\begin{cases} tn & = & \mid a_1 \mid + \mid a_2 \mid + ... + \mid a_n \mid \\ sn & = & a_1 + a_2 + ... + a_n \end{cases}$

Notre hypothese : lim tn converge A montrer : lim sn converge tn converge $\Rightarrow$ *tn est une suite de Cauchy c a d :*

$$\sum_{k=n+1}^{m} = \mid tm - tn \mid < \varepsilon$$

mais : $\mid sm - sn \mid = \mid \sum_{k=n+1}^{m} \mid \leq \sum_{k=n+1}^{m} < \varepsilon \Rightarrow$ *la suite (sn) est de Cauchy donc elle converge*

Observation : *Si* $a_n \geq 0 \quad (a_n \in \mathbb{R}) \quad \forall n = 1, 2, 3, ...$ *alors :* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *est une suite croissante* $(s_{n+1} \geq sn \quad \text{car } s_n + 1 - sn = a_{n+1} \geq 0)$ *et donc :*

- *soit la suite (sn) est borne* $\Rightarrow$ *elle converge* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*
- *soit (sn) n'est pas borne cad* $\lim_{n \to \infty} sn = \infty$ *c a d* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty(\text{diverge vers } \infty)$

1.2 Comparaison avec une integrale

Theoreme : *Soit* $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *une fonction decroissante. Alors :*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \textit{converge ssi} \quad \int_1^{\infty} f(x)\, dx \ \textit{converge}}$$

Preuve : photo

Preuve formelle : $\mathrm{f(n+1)} = \int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}} \mathrm{f(n+1)\,dx} \leq \int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}} \mathrm{f(x)dx} \leq \int_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n+1}} \mathrm{f(n)dx} = \mathrm{f(n)}$
$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\mathrm{N}}$:

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{n=2}}^{\mathrm{N+1}} \mathrm{f(n)} &\leq \int_1^{\mathrm{N+1}} \mathrm{f(x)\,dx} \\ &\leq \sum_{\mathrm{n=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{f(n)}\end{aligned}$$

$\lim_{\mathrm{N}\to\infty}$:

Exemple : *soit* $a > 0$ $\mathrm{f(x)} = \frac{1}{\mathrm{x^a}}$ *quand est ce que :* $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x^a}} < \infty$?
ssi $\mathrm{a} > 1$ *car*

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x^a}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\mathrm{a}} * \mathrm{x^{1-a}} & \text{si } \mathrm{a} \neq 1 \\ \log \mathrm{x} \end{cases}$$

$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x^a}} < \infty$ *ssi* a> 1 *(en partie* $\int_1^{\infty} = \infty$)

<u>On a donc :</u> $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n^a}}$ *converge ssi* q> 1

<u>En particulier :</u> $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}} = \infty$ *(la serie harmonique)*

est ce que $\sum_{\mathrm{n=2}}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n*(\log\ n)^a}}$ *converge ?* (voir serie)

1.3 Comparaison avec autre serie

nous savons si $\sum_{\mathrm{n=}} \mathrm{q^n}$ *converge, et si* $\sum_{\mathrm{=n}} \frac{1}{\mathrm{n^a}}$ *converge, est ce que* $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \tan(\frac{1}{\mathrm{n^2}})$ *converge ?*

proposition : *Si* $0 \leq \mathrm{a_n} \leq \mathrm{b_n}$ *et si* $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{b_n} < \infty$ *alors* $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{a_n} < \infty$

preuve :

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{a_n} \leq \sum_{\mathrm{n=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{b_n} \quad \lim_{\mathrm{N}\to\infty} : \quad \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{a_n} \leq \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \mathrm{b_n} \quad \square$$

Proposition : *Soient* $\mathrm{a_n} \in \mathbb{C}$*et* $\mathrm{b_n} \in (0, \infty)$ *Si la suite* $(\frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}})$*est borne cad si* $\exists$ C> 0
tq $|\frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}}| < 0 \quad \forall \mathrm{n}$

Theoreme (critere de la limite) : *Soient* $\mathrm{a_n} \in \mathbb{C}, \mathrm{b_n} \in (0, \infty)$. *Supposons que la limite* $\frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}}$ *existe*

Alors :
- *Si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{b_n}$ *converge, alors* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$ *converge absolument*
- *si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{b_n}$ *diverge*

Theoreme (critere de la limite *Soient* $\mathrm{a_n} \in \mathbb{C}$, $_{=}\mathrm{n} \in (0, \infty)$ *deux suite.*
Supposons que la suite $(\frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}})$ converge. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{b_n}$ converge alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$
converge absolument

Corrolaire : *Avec les meme hypothese. (contrapose) si* $\sum \mathrm{a_n}$ *diverge, alors* $\sum \mathrm{b_n}$ *diverge*

Corrolaire : *Si* $\mathrm{a_n} \in (0; \infty), \mathrm{b_n} \in (0, \infty)$, *et si* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}} \neq 0$, *alors* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n}$ *converge ssi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{b_n}$ *converge (car on peut ecrire les suite an et bn)*

Preuve du theoreme : *La suite* $\frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}}$ *converge* $\Rightarrow$ *elle est borne c a d* $\exists\ \mathrm{C} > 0 \quad \mathrm{tq} \quad \mid \frac{\mathrm{a_n}}{\mathrm{b_n}} \mid \leq \mathrm{C}$

On a donc : $\mid \mathrm{a_n} \mid \quad \leq \quad \mathrm{C} * \mid \mathrm{b_n} \mid$
Par l'hypothese $\sum \mathrm{b_n}$ *converge* $\Rightarrow \sum \mathrm{a_n}$ *converge* $\square$

Exemple :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan(\frac{1}{n^2})$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\tan(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

On pose : $\mathrm{b_n} = \frac{1}{n^2} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge, et donc :* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n^2}$ *converge*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Comparaison avec la serie geometrique :

Theoreme (critere du quotient) : *Soit* $a_n \in \mathbb{C}$ *une suite*

— si $\lim \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid < 1$ alors $\sum a_n$ converge absolument

— Si $\lim_{n \to \infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid > 1$ alors $\sum a_n$ diverge

Preuve :

— 1) *Soit q tq* $\lim \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid < q < 1$; $\Rightarrow \exists\ n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ *On a :* $\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid < q$; *On a donc :* $\mid a_{n0+1} \mid < q* \mid a_n0 \mid$; $\mid a_{n0+2} \mid < q* \mid a_{n0} + 1 \mid < q^2 \mid a_{n0} \mid$; $\mid a_{n0} + k \mid < q^k* \mid a_{n0} \mid$; *vu que* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *converge* ; $\sum_{k=0}^{\infty} \mid a_{n0} + k \mid$*converge*; $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$*converge*; *cad* $\sum a_n$ *converge absolument*

— 2) *Soit q tq* $1 < q < \lim \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid$; $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)$ $\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid > q$

$$\Rightarrow \mid a_{n0} + k \mid > q^k (a_{n0})$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mid a_n \mid = \infty$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \quad \square$$

Exemples : $x \in \mathbb{C}, x \neq 0$; $a_n = \frac{x^n}{n!}$

$$\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = \mid \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \mid = \frac{\mid x \mid}{n+1} \underset{n \to \infty}{\to} 0 \quad (< 1)$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge absolument*

· $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $a_n = \frac{1}{n^2}$

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} (\frac{n+1}{n})^2 = 1$*meme si* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge*

Theoreme (critere de racine) : *Soit* $a_n \in \mathbb{C}$ *une suite*

- 1) si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ alors $\sum a_n$ converge absolument
- 2) si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alors $\sum a_n$ diverge

Remarque : *si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, *alors le critere ne dit rien*

Preuve :

- 1) $\limsup \sqrt[n]{|a_n| < q < 1}$ *Par la definition de la limite sup :* $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)$ $\sqrt[n]{|a_n|} < q$; c a d $|a_n| < q^n$; $\Rightarrow \sum |a_N|$ *converge (car* $\sum q^n$ *converge)*
- 2) $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$; *Par la definition de limite sup* $\exists$ *nombre infin de* $n \in \mathbb{N}$ *tq :* $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ *cad :* $|a_N| > q^n$; $\Rightarrow$ *on ne peut pas avoir :*$\lim |a_n| = 0$; $\Rightarrow \sum a_n$ *diverge* $\square$

Exemples : $\cdot \sum \frac{x^n}{n!} := (a_n)$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 < 1$; $\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ *converge*

1.4 Critere de Leibniz et Dirichlet

2 critere pour convergence non absolue

Theoreme (critere de Leibniz) : *Soit* $b_n \in \mathbb{R}$ *est une suite decroissante tq :* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$
Alors :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n \quad \textit{Converge}}$$

Preuve : *on pose :* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_k$ *on a :*

$$s_0 \leq s_2 \leq s_4 \leq ... \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1$$

$\Rightarrow \limsup(s_{2n})$ existe (s_{2n} est croissante et borne); aussi $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}$ existe

on a aussi : $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1}$; *car :* $\lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim b_{2n+1} = 0$ *par l'hypothese*
$\Rightarrow$ *la suite converge* $\square$

Exemples :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ...$$

Converge mais ne converge pas absolument ($\sum \frac{1}{\mathrm{n}}$ ne converge pas)

Theoreme (critere de Drichlet) : *Soit* $\mathrm{b_n} \in \mathbb{R}$ *une suite decroissante tq* $\lim \mathrm{b_n} = 0$.
Soit $\mathrm{a_n} \in \mathbb{C}$ *une suite tq* $\mathrm{s_n} := \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}$ *est borne* *(cad* $\exists \mathrm{C} > 0$ tq $\mid \mathrm{s_n} \mid \leq \mathrm{C})$

$$\textit{Alors la serie} \quad \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_n b_n} \ \textit{converge}$$

Remarque : Si $\mathrm{a_n} = (-1)^{\mathrm{n}-1}$, Drichlet devient Leibniz $(\mathrm{s_1} = 1, \mathrm{s_2} = 0, \mathrm{s_3} = 1, \mathrm{s_4} = 0, ...)$

Preuve : *L'idee sommation par parties :*
$\mathrm{s_0} = 0, \quad \mathrm{s_n} := \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_k}$
$\mathrm{t_n} := \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_k b_k} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{s_k} - \mathrm{s_{k-1}})\mathrm{b_k} \quad = \quad \mathrm{s_n b_N} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}-1} \mathrm{s_k} * (\mathrm{b_k} - \mathrm{b_{k+1}})$

$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{s_n b_n} = 0$, car $(\mathrm{s_n})$ est bornee et $\lim \mathrm{b_n} = 0$ et limm $\mathrm{b_n} = 0$. Donc :

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a_N b_N} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{t_N} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{s_k}(\mathrm{b_k} - \mathrm{b_{k+1}})$$

On va montrer que : $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{s_k}(\mathrm{b_k} - \mathrm{b_{k+1}})$ converge.
$\mathrm{s_k}$ est borne cad $(\exists \mathrm{C} > 0$ tq $\mid \mathrm{s_k} \mid \leq \mathrm{C}$ et la serie $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (\mathrm{b_k} - \mathrm{b_{k+1}})$ converge :
$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{b_k} - \mathrm{b_{k+1}}) = (\mathrm{b_1} - \cancel{\mathrm{b_2}}\ \mathrm{etc} - \mathrm{b_{n+1}}) = \mathrm{b_1} - \mathrm{b_{n+1}} \to \mathrm{b_1}$
On a donc :

$\sum(\mathrm{b_k} - \mathrm{b_{k+1}})$ converge, $\mathrm{b_k} - \mathrm{b_{k+1}} \geq 0\,; \quad \mid \mathrm{s_k} \mid \leq \mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \sum \mathrm{s_k}(\mathrm{b_k} - \mathrm{b_{k+1}})$ converge
□

1.5 Convergence absolue et convergence non-absolue

Rappel :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{Converge absolument si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid \textit{converge}$$

($\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge)

Théoreme A : Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolument*
Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une bijection* (ici : $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., \}$)

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

" Si une serie converge absolument, alors la somme ne depend pas de l'ordre de la somation"

Théoreme B : Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge non-absolument ($\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid = \infty$),
et supposons que : $a_n \in \mathbb{R} (\forall n)$
Alors : $\forall s \in \mathbb{R}$, $\exists$ bijection $\sigma_S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \ \textit{diverge}}$$

Exemple : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... = \log(2)$ *converge non absolument*

un autre ordre :

$$\begin{array}{l|l|ll}
1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} & + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} & + \ ... & = \frac{3}{2}\log(2) \neq \log 2 \\
1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} & + ... & = \log(2) \\
 & & & = \frac{1}{2}\log(2)
\end{array}$$

Lemme : Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
Alors :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} = a_n = 0$$

Preuve : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\,;\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_N = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $\square$

Preuve du Theoreme A : Posons :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n, \quad s'_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(n)}$$

Il faut montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, *c a d que :* $\lim\limits_{n\to\infty} (s'_n - s_n) = 0$

Posons :

$A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$
$B_n = \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)\}$

On a donc : $s_n = \sum\limits_{k\in A_n=} a_k$

$$s'_n = \sum_{k\in A_n=} a_k \Rightarrow s'_n - s_N = \sum_{k\in B_n=} a_k - \sum_{k\in A_n=} a_k = \sum_{k\in B_n\setminus(A_n\cap B_n)=} - \sum_{k\in A_n\setminus(B_n\cap A_n)=}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mid S'_n - S_n \mid &\leq \\ &\leq \sum_{k\in A_n\triangle B_n=} \mid a_k \mid \end{aligned}$$

Si N est donné, alors $\forall n$ *suffisament quand on a* $\{1, 2, ...N\} \subset A_n \cap B_n$ *et donc* $\mid s'_N - s_n \mid \leq \mid S'_n - S_n \mid \leq \sum\limits_{k\in A_n\triangle B_n=} \mid a_k \mid \leq \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \mid a_k \mid$

car $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \mid a_k \mid = 0$, *On a :*

$$\lim_{n\to\infty} \mid s'_n - s_n \mid = 0 \quad \square$$

Preuve du Theoreme B (indication) :

On a : $\sum a_n$ qui converge ; *mais :* $\sum \mid a_n \mid$ diverge

Soient : $b_1, b_2, b_3, ...$ les $a_n \geq 0$
$c_1, c_2, c_3...$ les $a_n < 0$ *On a donc :* $\lim b_n = 0$; $\lim c_n = 0$ et :

$$\sum b_n = \infty; \quad \sum c_n = -\infty$$

Pour construire σ_S $(s \in \mathbb{R})$ $\square$

1.6 Produit de séries et l'exponentielle complexe :

Nous savons deja que : $(\forall x \in \mathbb{C}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge

(par ex : par le critere du quotient)

Théoreme : Si $x \in \mathbb{R}$ alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$

$x-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \quad = \sin(x)$
$1-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \quad = \cos(x)$

Preuve : (Taylor Lagrange) $t_n \in [0, 1]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} * x^k + \frac{f^{n+1}(t_n x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Si $f(x) = \exp x$
$(e^x)' = e^x \quad \to f^{(k)}(0) = 1$
$\exp x \quad = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{t_n x}}{(n+1)!} \times x^{n+1}$

$| R_n(x) | \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \times | x |^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

$\Rightarrow \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

pour sin x et cos x. (exercice) ☐

Définitions : Si $x \in \mathbb{C}$, alors :

$$\exp(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

proposition : Si $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \times \sin(x)$$

Preuve : $\exp(ix) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \quad = \quad 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
$(1-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...)$
$= \cos x + i \times \sin x$ ☐

<u>On va montrer :</u> $\forall x, y \in \mathbb{C} \ \exp(x) \times \exp(y) \quad = \quad \exp(x + y)$

Définitions : *Supposons que X est un ensemble dénombrable et que on a des nombre* $a_x \in \mathbb{C}$ $(\forall x \in X)$ *(cad* $x : X \to \mathbb{C}$*). Si* $\sigma : \mathbb{N} \to X$ *est une bijection* Alors on pose :

$$\sum_{x \in X} a_x := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} (1)$$

Supposons que (1) converge absolument

(convergence absolue $\Rightarrow \sum_{x \in X} a_x$ ne dépend pas de σ)

Théoreme : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergent absolument*

Alors : $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i) \times (\sum_{j=1}^{\infty} b_j) = \sum a_i \times b_j \qquad (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Corrolaire : Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_N$ convergent absolument, et si :

$$d_n := \sum_{k=0}^{n} \textit{(doute sur les borne)} a_k \times b_{n-k}, \quad \textit{alors :} \sum_{n=1}^{\infty} d_n = (\sum a_n) \times (\sum b_n)$$

Preuve : on sait que : $\sum a_i \times \sum b_i \quad = \quad \sum a_i \times b_i \quad (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

on doit choisir un ordre de la somation

$\square$

Exemple : si $| x | < 1$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Donc :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$$

$d_n = \sum a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{x^{n-k} x^k}_{x^n}$

$= (n+1)x^n$

Proposition : Si $x,y \in \mathbb{C}$, alors :

$$\exp(x) \times \exp(y) = \exp(x+y)$$

Rappel : exp(x) := $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Preuve : $(\sum \frac{x^n}{n!})(\sum \frac{y^n}{n!})$

$$\begin{aligned}
an &= \frac{x^n}{n!} \\
bn &= \frac{y^n}{n!} \\
dn &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{y^k}{k!} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{n-k} y^k \\
&= \frac{1}{n!}(x+y)^n \\
\textit{donc :}(x) &= \sum d_N = \sum \frac{1}{n!}(x+y)^n \\
&= \exp(x+y) \quad \square
\end{aligned}$$

Preuve du Théoreme :

— $\sum a_i b_j$ *Converge absolument,*

$$\sum | a_i b_j | < \infty \quad (i,j) \in \mathbb{N}^2$$

On prend cet ordre de la sommation : si l$\in \mathbb{N}$, *alors la* $l^2 - \text{ime}$ *somme partielle est :* $(\sum_{i=1}^{l} | a_i |)(\sum_{j=1}^{l} | b_j |)$ *cette somme partielle est :*

$$\leq (\sum_{i=1}^{\infty} | a_i |)(\sum_{j=1}^{\infty} | b_j |)$$

$\Rightarrow$ *la suite des somme partielles (qui est croissante) converge*

— $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i)(\sum_{j=1}^{\infty} b_j) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_i$:

on utilise le meme ordre de la sommation, la $l^2 - \text{ieme}$ *somme partielle est :* $\sum_{i=1}^{l} a_i)(\sum_{j=1}^{l} b_j)$

$$\lim_{l\to\infty} = (\sum_{i=1}^{\infty} a_i)(\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$$

on a donc trouver une sous suite qui converge vers : $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i)(\sum_{j=1}^{\infty} b_j)(*)$ *la suite des somme partielle converge (car ona une serie qui converge meme absolument)* $\Rightarrow$ *la limite est* $(*)$

Théoreme Euler

$$\sum \frac{1}{p} = \infty$$

⇒ # des premier est ∞*, vu que* $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$*, alors les premiers sont plus dense dans* $\mathbb{N}$ *que les carrés)*

preuve : l'idée :

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...)(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...)(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ...)$$

$$\begin{array}{rcl} & = & \sum \frac{1}{n} = \infty \\ (*) & = & \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1} - \frac{1}{3} ... \\ & = & \prod_{\text{premier}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \infty \\ \log : & & \sum_{p} - \log(1 - \frac{1}{p}) = \infty \end{array}$$

vu que : $\lim_{x \to 0} -\log(1-x)x = 1$
on a aussi vu que : $(x{=}\frac{1}{p})$

$$\sum_{\text{premier}} \frac{1}{p}$$

2 Suite et série de fonctions :

Motivation : *justifier les calcules :* $\mid x \mid < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= (\frac{1}{1-x})' = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)' = ? \\ \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' &= \sum_{n=1}^{\infty} n \times x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \log(1-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{1-x} dx &= \int_0^t (\sum_{n=0}^{\infty} x^n) dx = ? \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \end{aligned}$$

2.1 Convergence unifomre :

Définition : *Soit A un ensemble et :* $f_n : A \to \mathbb{R}$ (ou $\to \mathbb{C}$)
$n \in \mathbb{N}$, *on dit que la suite* $(f_n)_{n=1}$ *converge* *ponctuellement* *vers :* $f : A \to \mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$)
Si $(\forall a \in A) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(n)$

Exemple : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \arctan(nx)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \pi/2 & x < 2 \end{cases}$$

Alors fn converge ponctuelement vers f(x)

Cette limite n'est pas continue

Exemple : fn : [0,1] $\to \mathbb{R}$
$\lim_{n\to\infty} fn(x) = 0 \quad \int_0^1 fn(x)dx = 1/2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \, dx = 1/2 \neq \int_0^1 (\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(x)}_{0}) dx$$

Notation : pour f :A→ $\mathbb{C}$ on pose : $||f|| := \sup_{a\in A}|f(a)|$ *La norme de f*

Motivation : si f,g : A → $\mathbb{C}$, alors on va voir $||f-g||$ comme "la distance" entre f et g

définition : On dit que une suite de fonction $f_n : A \to \mathbb{C}$ Converge uniformement vers $f : A \to \mathbb{C}$ si :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0}$$

c a d : si $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad ||f_n - f|| < \varepsilon$

Proposition : Si $f_n \to f$ uniformement, alors : $f_n \to f$ ponctuellement

Preuve : Si $a \in A$, alors :

$$||f_n - f|| \geq |f_n(a) - f(a)|$$

donc si : $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$, alors aussi : $\lim_{n\to\infty} |f_n(a) - f(a)| = 0$,
cad : $\lim_{n\to\infty} f_N(a) = f(a)$ $\square$

exemple : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *la limite partielle est 0* *on a :* $f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ponct
est ce que : $f_n \to 0$ uniformement ?

$$||f_n - 0|| = ||f_n|| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\frac{\sin(xn)}{n}| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow f_n \to 0$ uniform

Definition : $f_n \to f$ unif

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall a \in A) \quad |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

conv ponct :

$$(\forall a \in A)(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0) \quad |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

Théoreme : -
Soient $A \subset \mathbb{R}$ (ou $A \subset \mathbb{C}$) et $f_N : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $n = 1, 2, 3, ...$
Supposons que toute fn est continue et que la suite $(fn)_{n=1}\infty$ converge uniformement vers :

$$f : A \to \mathbb{R}(\text{ou}\,\mathbb{C}), \qquad \textit{Alors f est continue}$$

Preuve : *f est continue en a*$\in$ A *si :*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall a' \in A) \quad |a' - a| < \delta \Rightarrow |f'(a) - f(a)| < \varepsilon$$

fn → f uniforment ⇒ ∀ n *suffisament grand* $||f_n - f|| < \frac{\varepsilon}{3}$
o fn est continue ⇒ :

$$(\exists\delta > 0)(\forall a' \in A)(|a' - a| < \delta \Rightarrow \quad |f_n(a') - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

il faut montrer : si$|a' - a| < \delta$ *alors :* $|f(a') - f(a)| < \varepsilon$ *Mais :*$|f(a') - f(a)| =$

$$|(f(a') - f_n(a')) + (f_n(a') - f_n(a)) + (f_n(a) - f(a))|$$

inégalité triangulaire :

$$\begin{array}{llll} \leq & |f(a') - f_n(a')| & +|f_n(a') - f_n(a)| & +|f_n(a) - f(a)| \\ \leq & \varepsilon/3 & + \varepsilon/3 & + \varepsilon/3 = \epsilon \end{array} \quad \square$$

2.2 Critère de convergence uniforme

Théoreme : - Critère de Cauchy "toute suite de Cauchy converge uniformement")
Soit $f_N : A \to \mathbb{C}$ une suite de fonction tq :

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N_0)(\forall m, n \geq n_0) \quad ||f_m - f_n|| \leq (*)\varepsilon$$

— ("une suite de caucht"). Alors la suite $f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformement

Preuve : convergence ponctuelle :
Si a$\in$ A, alors :

$$|f_m(a) - f_n(a)| \leq ||f_m - f_n||$$

$(\forall m, n)$ *Vu que (*) on a que l a suite (f_ n(a))*$_{n=1}^{\infty}$ *est de Cauchy* $\Rightarrow f_n(a))_{n=1}^{\infty}$ converge *et on pose f(a)=*$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)$ *;* *On a donc une fonction f :A*$\to \mathbb{C}$ *et* $f_n \to f$ *ponct*

— $f_n \to f$ uniformement :
Nous savons que $(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0)$ $||f_m - f_n|| < \varepsilon$, *en particuier :*
$(\forall a \in A)$ $|f_m(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$; $\lim\limits_{n\to\infty} |f_m(a) - f_n(a)| = |f(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$; On a donc $\forall a \in A, |f(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$; cad $||f - f_n|| \leq \varepsilon$
Cela implique que $f_n \to f$ *uniformement* □

Définition : -
Si $g_n : A \to \mathbb{C}$ *on dit que :* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge uniformement* ; si $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} g_n$ *converge uniformement*

Propriété : - (inegalité triangulaire pour || ||
Si f,g : A→ $\mathbb{C}$ alors :

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$$

Preuve : -
$(\forall a \in A) : |f(a) + f(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| \leq ||f|| + ||g||$; on prend $\sup\limits_{a\in A}$: - $||f + G|| \leq ||f|| + ||g||$

Théoreme : - (critère de Weierstrauss) :
Soit $g_n : A \to \mathbb{C}$ *une suite de fonctions tq :* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||g_n|| < \infty$ *Alors :* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge uniformement*

Preuve : -
Posons : $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$ $(s_n : A \to \mathbb{C})$; $t_n := \sum\limits_{k=1}^{n} ||g_k||$ $(\in \mathbb{R})$; si $m \geq n$ *alors :* $||s_m - s_n|| = || \sum\limits_{k=n+1}^{m} g_k|| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} ||g|| = t_m - t_n$; $= |t_m - t_n|$; *Par l'hypothèse la suite* $(t_n)_{n=1}^{\infty}$

⇒ elle est de Cauchy ⇒ la suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *est de Cauchy* ⇒ *sn est converge uniformement* □

Exemple : -

$$g_n(x) = \frac{\sin(x)\, nx}{n^2} \qquad g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

converge uniform ?

$||g_n|| = x \underset{sup}{\in} \mathbb{R}$ $|\frac{\sin(x)}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||g_N|| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$; $\Rightarrow \sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ *converge uniformement*
$\Rightarrow f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ *est une fonction continue*

Corrolaire : -(forme alternative du critere de Weirstrass)
Si $g_n : A \to \mathbb{C}$ et si $b_n \geq 0$ sont tq :
$(\forall a \in A) \quad |g_n(a)| \leq b_n$ *et si* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, *alors :*

$$\sum g_n \quad \textit{converge unformement}$$

Preuve : - $||g_n|| \leq b_n \Rightarrow \sum ||g_n|| < \infty$ $\square$

2.3 Integration et différentiation

Théoreme : -
Soient $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ *des fonctions continues* (n=1,2,3...) *Si la suite fn converge uniformement, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Vérifions pour série : si $\sum g_n$ converge uniformement alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x))dx$$

Preuve : -
posons $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
On veut montrer que $\int_a^b g(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx$
On a :

$$|\int_a^b (f(x) - f_n(x))dx| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx$$

$\leq (b-a) \cdot ||f - f_n|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (convergence uniforme) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - f_n(x))dx = 0$ $\square$

Exemple : -
Si $|x| < 1$ alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \textit{Conv est uniforme}$$

sum $[-q, q]$, si $0 \leq q < 1$, par weirstrass : $||x^n|| = q^n$ et $\sum q^n = \frac{1}{1-q}$ *converge*

si : $0 \leq t \leq q$:

$$\int_0^t (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$\int_0^t \frac{dx}{1-x} = -\log(1-t)$ $\Rightarrow \forall t \in (-1, 1) : \boxed{-\log(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}}$

Exemple : -

1. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\lim f_n = 0$ $(||f_n|| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0)$; mas $f'_n(x) = \cos(nx)$ ne converge pas $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n$ n'existe pas
2. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$; $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} |x| := f(x)$; *f n'est pas dérivable*

Théoreme : Soit $f_n[a,b] \to \mathbb{C}$ des fonctions de la classe C^1 (cad f'_n est continue). Supposons que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge (ponctuellement) et que la suite $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformement. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ est de la classe C^1 et $\lim\limits_{n\to\infty}(f'_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'$

Preuve : Posons $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $g := \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$ Vu que f'_n sont continue et que $f'_n \underset{n\to\infty}{\to} g$ uniformement nous savons que g est continue
il faut montrer que g=f'
Soient $t_0; t_1 \in [a,b]$ Alors : $\int_{t_0}^{t_1} g(x)dx; = \int_{t_0}^{t_1} \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)dx; = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t_1} f'_n(x)dx; = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(t_1) - f_n(t_0))$
$= f(t_1) - f(t_0)$ $\Rightarrow$ *f est une fonction primitive de g_1* f'=g $\square$

Théoreme pour les séries : -
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} g'_n = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n)'$ *Si ;* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge et si ,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g'_n$ *converge uniformement*

Exemple : -
si $x \in (-1,1)$ alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

on pose : $\begin{aligned} g_n(x) &= x^n \\ g'_N(x) &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$ *est ce que :*

$$\sum g'_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

converge uniformement ? *Avec Weirestrss : Soit q tq* $0 < q < 1$
sur $[-q,q]$ on a :

$$|n \cdot x^{n-1}| \le n \cdot q^{n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} \textit{ converge}$$

par critere du quotient ($\lim \frac{(n+1)q^n}{n \cdot q^{n-1}}$; $= q \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = q < 1$ (weirest) $\sum n \cdot x^{n-1}$ converge uniform sur [-q,q]
$\Rightarrow (\sum x^n)' = \sum n \cdot x^{n-1}$ $(\forall x) \in [-q,q]$ vrai $\forall x \in (-1,1)$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

2.4 Série entières :

Série entière = série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$$

Exemples : -

— $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \text{ tq } |x| < 1$

— $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x!} = \exp(x) \qquad \forall x$

— $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$

Proposition : -

Soit $x_0 \in \mathbb{C}$ tq $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x_0^n$ converge Alors $\forall x \in \mathbb{C} \quad |x| < |x_0|$

la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ *converge la convergence est uniforme sur le disque*

$$D_q := \{x \in \mathbb{C} | \quad |x| \leq q\}$$

pour tout q tq q< $|x_0|$

Preuve : -

$\sum c_n \cdot x_0^n$ *converge* $\quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0 \quad \Rightarrow \exists C > 0 \quad \text{tq} \quad |cC_n \cdot x_0^n| \leq C \quad \forall n$
Si $|x| < |x_0|$, alors $\quad |C_n \cdot x^n| = |C_n \cdot x_0^n| \cdot |\frac{x}{x_0}|^n \leq (*) C \cdot |\frac{x}{x_0}|^n, \quad |\frac{x}{x_0}| < 1 \Rightarrow \quad \sum |\frac{x}{x_0}|^n < \infty \quad \Rightarrow (\text{par}*) \sum |C_n x^n| < \infty$ cad $\sum c_n x^n$

converge absolument par la convergence uniforme :

on utilise Weirerstrass :

$$||C_n \cdot x^n||_{\text{surDq}}$$

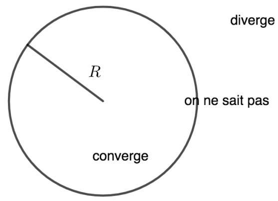
Si : $\sum c_n \cdot x_0^n$ *converge converge uniformement sur* D_q *si* $q < (x_0)$

Théoreme : -

Si $c_0, c_1, c_2, ... \in \mathbb{C}$ *alors* $\mathbb{R} \in [0, \infty]$ *tq :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \begin{cases} \textit{converge absolument} & \text{si } |x| < R \\ \textit{diverge} & \text{si } |x| > R \end{cases} \qquad \text{Si } q < R \text{ alors } \quad \sum c_n \cdot x^n \textit{ converge unif sur } D_q$$

Preuve : - on pose R= $\sup\{x \in \mathbb{C} | \sum c_n \cdot x^n \quad \textit{converge}\}$ et on utilise la prop précédente

$\square$ 

R est le rayon de la convergence de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$

Théoreme : -

$$(1) \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|C_n|}}$$

$$(2) \quad R - \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| \textit{si cette limite existe}$$

Preuve : (1) critere de la racine :

pososn $\quad a_n = c_n \cdot x^n \quad$ par $\sum a_N = \sum c_n x^n \begin{cases} \textit{converge si} & \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|C_n x^n} < 1 \\ \textit{diverge si} & > 1 \end{cases}$

Mais $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|C_n \cdot x^n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|C_n|}$ Et donc : si $|x| < \frac{1}{\text{limsup} \sqrt[n]{|C_n|}}$ *la série converge*
et si $|x| > \frac{1}{\lim\sup} \rightarrow$ *diverge*

(2) *Avec critère du quotient :*

$$\text{si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1} \cdot x^{n+1}|}{|C_n \cdot x^n|} < 1 \quad \textit{alors :} \sum c_n x^n \textit{ converge}$$

si > 1 alors diverge
On a donc :

$$\begin{array}{lll} |x| \cdot \lim|\frac{c_{n+1}}{C_n}| & < 1 \Rightarrow \textit{converge} & \\ & > 1 \Rightarrow \textit{diverge} & \\ \text{cad} \quad |x| < \lim|\frac{c_N}{c_{n+1}}| & \textit{converge} & \square \\ > & \Rightarrow \textit{diverge} & \end{array}$$

Exemple : -

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n ; \quad c_n = n^2 \quad R = \lim|\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

$\boxed{\text{A partir de Maintenant : } x \in \mathbb{R}}$

Théoreme : - Si le rayon de la convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$ est R alors le rayon de la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ est aussi R et $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R)$

La fonction f :(-R,R) $\to \mathbb{C}$ $\quad f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad$ et C^∞ et $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Preuve : - Le rayon R' de la convergence de $\sum c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ est le meme que pour :

$$x \cdot \sum c_n \cdot \cdot x^{n-1} = \sum c_n \cdot n \cdot x^n$$

et donc :

$$R' = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|C_n \cdot x^n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|C_n|} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

$\frac{1}{\lim\sup \sqrt[n]{|C_n|}} = R\,;$ cad R'=R ; (Rappel) $\sum(g_n') = (\sum g_n)'$ si $\sum(g_n)'$ *converge uniformement*

et si : $\sum g_n$ *converge* *On pose :*$g_n(x) = c_n \cdot x^n$ $\quad g_N'(x) = nc_n \cdot x^{n-1}$ *Choissons q tq 0*$\leq q < R$

$\Rightarrow \quad \sum g_n'$ *et* $\sum g_n$ *convrge uniformement sur*$[-q,q]$

$\Rightarrow \quad \sum g_n' = (\sum g_n)'$*sur*$[-q,q](\forall q < R)$

$\Rightarrow \quad \sum g_n' = (\sum g_n)'$*sur*$(-R,R)$

On a donc : $\forall x \in (-R,R)$:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x$' $\leftarrow$ une serie entire avec le me R

$\Rightarrow (\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n)'; \quad = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \cdot (n+1) \cdot x^n n + 2$

<u>Rappel</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n (*) \quad \exists R \in [0,\infty]$$

tq (*) converge si $|x| < R$ diverge si $|x| > R$ Sur (-R,R) on peut différentier et integrer (*) terme par terme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Exemple : -

$\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x!} \quad R = \infty \qquad (\frac{x^n}{x!})' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}; \quad \Rightarrow (\exp(x))' = \exp(x) \ \lambda \in \mathbb{C} \quad \exp(\lambda x) =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!}; \quad (\frac{\lambda^n x^n}{n!})' = \frac{\lambda^n \cdot x^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda \cdot \frac{\lambda^{n-1} \cdot x^{n-1}}{(n-1)!}; \quad (\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot x^n}{n!})'; \quad = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot \frac{\lambda^{n-1} \cdot x^{n-1}}{(n-1)!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot \frac{\lambda^n \cdot x^n}{n!} = \lambda \cdot \exp(\lambda x) = (\exp(\lambda))'$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad R = 1 \quad t \in (-R, R) = (-1, 1)$

$$-\log(1-t) = \int_0^t (\sum_{n=0}^{\infty} x^n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n \, dx$$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\log(1-t) \quad \forall t \in (-1, 1)$

<u>Remarque :</u> - pour t = -1 on n'a rien démontrer mais :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \textit{converge, en fait : } = -\log 2 \quad \textit{Par Leibniz mais il faut monter :}$$

- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 ... \quad (q = -x^2) \qquad$ *converge ssi :*$|x| < 1 \Rightarrow R = 1$
  $\forall t \in (-1, 1)$:

$$\arctan(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - ...(t)$$

La série (+) converge aussi pour t=1 (et t=-1) :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{q} - \frac{1}{11} + ... \quad \textit{par leibniz}$$

en fait $=\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ mais il faut le montrer car $1 \notin (-1, 1)$

Théoreme (Abel) : - Supposons que :

$$(*) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \textit{converge pour :} x = x_0 \in \mathbb{R}$$

Alors la convergence de (*) est uniforme sur $[0, x_0]$(si $x_0 > 0$) ou sur $[x_0, 0]$ si $x_0 < 0$
- En particulier la fonction (*) est continue sur $[0, x_0]$ (ou sur $[x_0, 0]$ si $x_0 \leq 0$) et donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Exemple : -

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad (\forall |x| < 1)$$

$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \overset{abel}{=} \lim_{x \to -1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \to -1} -\log(1-x) \quad = -\log(2)$

pareil : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \lim_{x \to 1} \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Preuve du Théoreme : - on peut supposer que $x_0 = 1$ car :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n (\frac{x}{x_0})^n$$

- si $x_0 = 1$ on peut supposer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 0 \quad (\textit{pour cela on remplace } c_0 \textit{ par } -\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

l'idée de la preuve : sommation par parties, on pose :

$$s_N := \sum_{k=0}^{n} c_k \quad (\text{et}\, s_{-1} := 0)$$

donc : $c_n = s_n - s_{n-1}$; $\lim_{n\to\infty} s_n := 0$

On a : $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = \; = \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) x^t; \quad = s_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} s_k \cdot (x^k - x^{k+1})$

vue que $s_n \underset{n\to\infty}{\to}$, on a :

$$s_n x^n \to 0 \quad \text{unifsur}[0,1] \quad \text{car}\, ||s_n x^n|| = ||s_n|| \to 0$$

Donc il faut montrer que : $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} s_k (x^k - x^{k+1})$ *est uniforme sur [0,1]*

que $\sum_{k=0}^{n} s_k \cdot (x^k - x^{k-+1})$

A Monter : -

$$\sum_{k=0}^{n} s_k \cdot x^k \cdot (1-x) \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{n} s_k \cdot x^k \cdot (1-x) := f_n(x)$$

unif sur [0,1] en utilisant que $\lim_{k\to\infty} s_k = 0$

-il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n|| = 0$ $|f(x) - f_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k x^k (1-x)|$

$=|1-x| \cdot |\sum_{k=n+1}^{\infty} s_k x^k|; \quad \le |1-x| \cdot \sup_{k\ge n+1} |s_k| \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k; \quad = (1-x) \cdot \sup_{k\ge n+1} |s_k| \cdot \frac{x^{n+1}}{1-x}$

$= x^{n+1} \sup_{k\ge n+1} |s_k| \le \sup_{k\ge n+1} |s_k|$

Donc : $\forall x \in [0,1]$ on a :

$$|f(x) - f_n(x)| \le \sup_{k\ge n+1} |s_k| \qquad \text{cad}\, ||f - f_n|| \le \sup_{k\ge n+1} |s_k|$$

finalement :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n+1} |s_k| = \lim_{n\to\infty} \sup |s_k| = \lim_{n\to\infty} |s_n| = 0 \Rightarrow ||f - f_n|| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \square$$

2.5 Série de Taylor

Rappel : Si R est la rayon de convergence de $(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, alors f est $C\infty sur (-R, R) et c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Définitions : - Soit f : (-a,a) $\rightarrow \mathbb{R}$(ou $\rightarrow \mathbb{C}$/ une fontion C^{∞} Alors la serfie de Taylor est la serie entiere :

$$(*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Question : est ce que (*) converge vers f ? pour quel x$\in (-a, a)$?
contre exemple :

- $\exists$f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{C}^{\infty}$ tq sa serie de Taylor ne converge que pour x=0 (cad le rayon de la convergence est 0)
- $f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ f :$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^{∞} et $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$ exercice

$\Rightarrow$ la serie de Taylor est $0 \neq f(x)$ pour le comprendre Analyse complexe

Exemple positif : -

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \qquad \exp(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\forall x \in (-1, 1)$ $\qquad$ $\forall x$

Résumer de la partie 2 : -

– Savoir faire : *démontrer si une suite ou série de fonction converge unif ou pas*

– Méthode :

- de la définition
- critere de Weirstrass

– A quoi ca sert ? :

- montrer que $\lim_{n\rightarrow\infty} f_n$ est continue
- $(\lim f_n)' = \lim f_n'$ $\int_a^b \lim f_n(x)dx = \lim \int_a^b f_n(x)dx$

Cas particulier : serie entiere

- rayon de la convergence
- on peut echanger $\sum$ avec la dérivé ou avec l'integrale

3 Espace Métriques

Motivation :

- Préparation pour les fonctions a plusieur variable
- comprendre mieux la convergence uniforme
- "une grande généralisation"

3.1 Métriques et normes

Définition Si X est un ensemble, alors une métrique sur X est une fonction $d : X \times X \to [0, \infty)$ telle que $\forall x, y, z \in X$

— $d(x, y) = 0 \iff x = y$
— $d(x, y) = d(y, x)$
— $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un espace metrique est un ensemble avec une métrique.

Exemples

— si (X, d) est un espce métrique, et si $Y \subset X$, alors $(Y, d|_{Y\times Y})$ est aussi un espace métrique.
— $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
— $X = \mathbb{C}$, $d(x, y) = |x - y|$
— $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$

Définition Soit V un espace vectoriel réel (ou complexe). Une norme sur V est une fonction $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ telle que $\forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

— $\|v\| = 0 \iff v = 0$
— $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
— $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Exemples $V = \mathbb{R}^n$, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

Proposition Si $\| \cdot \|$ est une norme sur V alors $d(u, v) = \|u - v\|$ est une métrique sur V.

Demonstration : -

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v \\ d(u, v) &= \|v - u\| = \|(-1)(u - v)\| = \|u - v\| = d(u, v) \\ d(u, w) &= \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(u, w) \qquad \square \end{aligned}$$

Terminologie Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé une espace norme.

Exemples

— $V = R^n,\ v = (v_1, \dots, v_n)$

$$\|v\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$$

$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|v\|_2 := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

— Si A est un ensemble, $V = B(A) : \{f : A \to \mathbb{C} ou \mathbb{R} \mid f \text{ est bornée } \}$
Si $f \in V$, on pose :

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \in A} |f(a)|$$

— $a < b \in \mathbb{R}$, $V := C([a, b])$

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$$

3.2 Fonctions continues

Définition Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métrique.
Une application $f : X \to Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X \quad d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Définition Si (X, d) est un espace métrique, $x_0 \in X$, $R \in (0, \infty)$, alors la boule ouverte de rayon R centrée en x_0 est

$$B_X(x_0, R) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < R\}$$

Exemples

— $X = \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$B_{\mathbb{R}}(x_0, R) = (x_0 - R, x_0 + R)$$

— $X = \mathbb{R}^2$

$B_{\mathbb{R}^2}(x_0, R) =$

On a donc $f : X \to Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$$

Théorème Si $f : X \to Y$ est continue et si $g : Y \to Z$ est continue, alors $g \circ f : X \to Z$ est aussi continue.

Demonstration : -
Soit $x_0 \in X$, on pose $y_0 := f(x_0)$, $z_0 := g(y_0)$. Par l'hypothèse : g est continue, donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad g(B_Y(y_0, \delta)) \subset B_Z(z_0, \varepsilon)$$

Mais f est aussi continue, donc :

$$\exists \delta' > 0 \qquad f(B_X(x_0, \delta')) \subset B_Z(y_0, \delta)$$

Donc :

$$g(f(B_X(x_0, \delta'))) \subset B_Z(z_0, \varepsilon) \Rightarrow g \circ f \text{est continue}$$

Proposition : -
Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont continues alros $f + g, fg : X \to \mathbb{R}$ sont continues.

Demonstration : -
Voir semestre 1.

Définition : -
Une fonction $f : X \to Y$ est Lipschitzienne si $\exists C > 0$ tel que $\forall x, x' \in X$ on a

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq C d_X(x, x')$$

Proposition : -
Si f est Lipschitzienne, alors elle est continue.

Demonstration : -
On peut poser $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$.

Remarque Si V, W sont des espaces normés et $f : V \Rightarrow W$ est linéaire, alors f est Lipschitzienne si et seulement si

$$\exists C > 0 \text{tel que} \forall v \in V \qquad \|f(v)\|_W \leq C\|v\|$$

Demonstration : -

$$\forall v_1, v_2 \in V \qquad d_W(f(v_1), f(v_2)) = \|f(v_1)–f(v_2)\|_W = \|f(v_1–v_2)\|_W \leq C\|v_1–v_2\|_V \qquad v := v_1–v_2$$

text

Exemples : -
– Demonstration :

—
$$p_i : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto x_i \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

p_i est linéaire et $\|p_1(x)\| = |x_i| \leq \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$, c'est à dire p_i est lipschitzienne avec $C = 1 \Rightarrow p_i$ est continue.

— (Si on utilise la prop $f + g, f \cdot g$) Tout polynôme est une fonciton continue $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Par exemple : $\quad f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto 3x_1x_2 + x_3^2 \end{cases}$

— (On peut composer des fonctions continues), par exemple : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto \sin(x_1x_2^2 + e^{x_1+x_2^2}) \end{cases}$

— $X = C([a, b])$ avec $\| \cdot \|_\infty$

$$I : \begin{cases} X & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \int_a^b f(x)\, dx \end{cases}$$

I est une fonction linéaire et elle est lipschitzienne :

$$|I(f)| = \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b–a) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f(x)| = (b–a) \cdot \|f\|_\infty \Rightarrow I \text{est continue} (C = b–a)$$

Quelle norme à utiliser sur $\mathbb{R}^n$? (Spoiler : peut importe)

Définition Deux normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sur V sont equivalentes si

$$\exists C_1, C_2 > 0 \text{tels que} \forall v \in V \quad \|v\| \leq C_1\|v\|' \text{et} \|v\|' \leq C_2\|v\|$$

i.e. : $\quad \| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sont équivalents si et seulement si : $\begin{matrix} id_V : & (V, \| \cdot \|) & \to & (V, \| \cdot \|') \\ id_V : & (V, \| \cdot \|') & \to & (V, \| \cdot \|) \end{matrix}$
sont lipschitziennes.

Proposition Des normes équivalentes donnent les memes notions de la continuité, c'est à dire : Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur V sont équivalents ; si X est un espace métrique, et si $f : X \to V$ et $g : V \to X$ sont des foncitons, alors f est continue. $X \to (V, \|\cdot\|)$ si et seulement si f est continue $X \to (V, \|\cdot\|')$. La même chose pour g

Demonstration : -
$X \overset{f}{\underset{}{\overset{\text{cont.}}{\longrightarrow}}} (V, \|\cdot\|) \overset{\mathrm{id}_V}{\overset{\text{cont.}}{\longrightarrow}} (V, \|\cdot\|')$ et la composition de fonction continues est continues.

Plus tard on v montrer : Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Proposition Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Demonstration : -
Si $x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum x_1^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$évident
$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$évident
$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$
$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

3.3 Limite de suite :

Définition : - Si (X,d) est un espace métrique, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite d'éléments de X, et si x$\in$ X alors on dit que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ssi : $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

Exemples : -

- X=$\mathbb{R}$ d(x,y) $= |x-y|$ la définition classique de la limite
- A un ensemble, X=B(A) $= \{f : A \to \mathbb{R} |$ f est borné $\}$ d donné par $||\cdot||_\infty$ $(||f||_\infty := \sup_{a\in A}|f(a)|)$ Si $f_n \in B(A) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), f \in B(A)$, alors $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ssi $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$

Proposition : - Soient X,Y des espace métrique et f :X$\to$ Y une application.

Alors f est continue en $x \in X$ ssi $\forall$ suite$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dans X tq $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ on a ; :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Preuve : - voir semestre 1 □

Exemples : -

— X= C([a,b]) avec $||\cdot||_\infty$, Y=$\mathbb{R}$ on a que :

$$I : X \to \mathbb{R} \quad I(f) := \int_a^b f(x)\,dx \textit{ est continue } \Rightarrow \textit{si } f_n \to f \textit{ dans X,}$$

cad si $f_n \to f$ *uni, alors :* $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$

Rappel : - $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ sur V sont equivalent si :

$$\exists C_1, C_2 > 0 \quad \text{tq} \quad ||v|| \leq C_1||v||' \quad \text{et} \quad ||v||' \leq C_2||v||$$

Proposition : -

Si $||\cdot||$ et $||\cdot||'$ sur V sont equivalent et si x_n est une suite dans V, alors $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ par rapport a $||\cdot||$ ssi :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textit{par rapport a :} ||\cdot||'$$

Preuve : -

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$$

$$\Updownarrow \qquad \textit{(par la def d'equivalence)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ||x_n - x||' = 0 \qquad \square$$

Rappel : - les norme :

— $||\cdot||_2, ||\cdot||_1, ||\cdot||_\infty$ Sur $\mathbb{R}$ sont equivalentes

Proposition : - Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dans $\mathbb{R}^k$,

$x_n = (x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nk})$ $(x_{ni} \in \mathbb{R})$ Alors : $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}^k$

$(a = (a_1, a_2, ..., a_k))$ ssi

$\lim_{n\to\infty} x_{ni} = a_i \quad (\forall i = 1, 2, 3, ..., k)$

preuve : - Utilisons la norme $||\cdot||_1$

$(||a||_1 := \sum_{i=1}^{k} |a_i|)$.*on a donc :* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

ssi $\lim_{n\to\infty} ||x_n - a||_1 = O$ ssi $\sum_{i=1}^{k} |x_{ni} - a_i| = 0$

ssi $\forall i \lim_{n\to\infty} |x_{ni} - a_i| = 0 \quad \square$

Proposition : - Soit X un esp métrique et f :X$\to \mathbb{R}^k$ une fonction :

Autrement di : on a k fonction : $f_1, ..., f_k : x \to \mathbb{R}\,(f(x) = f_1(x), ..., f_k(x)) \quad \forall x \in X$

Alors f est continue ssi f_i est continue $(\forall i = 1, ..., k)$

Preuve : - f est continue ssi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$
(pour toute suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente dans X)

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \qquad (x := \lim_{n\to\infty} x_n)$

ssi $\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(x)$ *(par la propriete precedente)*

ssi *le fi sont continue :* $\square$

3.4 Sous-ensemble ouvert et fermés :

Rappel : la boule ouverte :

$$B_X(x, R) := \{y \in X | d(x, y) < R\}$$

X esp métrique $\quad x \in X, R > 0$

Définition : - Soit X un espace métrique. Alors :
Un sous - ensemble $U \subset X$ est ouvert si :

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \qquad B_X(x, \varepsilon) \subset U$$

On dit que : $U \subset X$ est ferme si X,U, $\subset$ X est ouvert

Exemple : - X= $\mathbb{R}^2$ $\quad$ T (un triangle) $\subset \mathbb{R}^2$ $\qquad$ T$\subset \mathbb{R}^2$ n'est pas ouvert

$T \subset \mathbb{R}^2$ *est fermé :*

$* \ X = \mathbb{R}$

$*x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ *est ouvert pas ferme*

$*[a, b] \subset \mathbb{R}$ *ferme pas ouvert*

$*(-\infty, a] \subset \mathbb{R}$

$*(a, \infty)$ *est ouvert pas ferme*

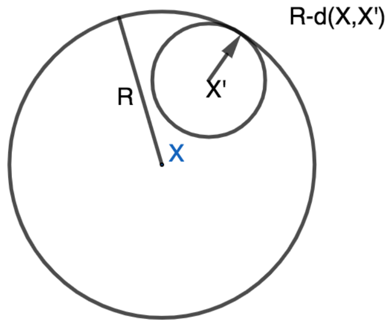
$*(-\infty, \infty) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ *ouvert et ferme*

$*\mathbb{R}\backslash\mathbb{R} = \emptyset \subset \mathbb{R}$ *est ouvert et femrme*

$*(a, b] \subset \mathbb{R}$ *ni ouvert ni ferme*

Prosposition : - Si x$\in$ X $R > 0$
alors B(x,R) $\subset$ X est un sous ensemble ouvert :

Preuve : -



$\mathrm{Si}\, x' \in B(x, R)$ *alors* $d(x, x') < R$

Montrons que $B(x', R - d(x, x')) \subset B(x, R)$:

$y \in B(x', R - d(x, x'))$ ssi $d(y, x') < R - d(x, x')$.

il faut montrer que : $d(x, y) < R$

$\mathrm{On\,a} : d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$

$< d(x, x') + R - d(x, x') = R \quad \square$

Theoreme : - F : X→ Y est continue ssi :

$$\forall U \subset Y \textit{ ouvert le péimage } \quad f^{-1}(U) \subset X \textit{ est ouvert}$$

Notation : -

$$f^{-1}(U) := \{x \in X | f(x) \in U\}$$

Preuve : - f est continue en $x \in X$

$\mathrm{ssi}(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$

$B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$

⇒: *supposons que f est continue* *Soit* $U \subset Y$ *un sous ensemble ouvert.*

Il faut montrer que $f^{-1}(U) \subset X$ *est ouvert cad :*

$$\forall x \in f^{-1}(U) \quad \exists \delta > 0 \quad \mathrm{tq} \quad B_X(x, \delta)$$

Mais : $U \subseteq Y$ *est ouvert*

$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \mathrm{tq} \quad B_Y(f(x), \varepsilon) \subset U$

car f est continue , $\exists \delta > 0 \quad \mathrm{tq}$

$B_X \subset (, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(U)$

$\Leftarrow$ $\mathrm{supposons}\, \forall U \subset Y$ *ouvert*

$f^{-1}(U) \subset X$ *est ouvert. Faut montrer que f est continue :*

$\mathrm{Si} x \in X y := f(x) \subset Y \quad \mathrm{Si} \varepsilon > 0$

$\mathrm{alors} B_Y(y, \varepsilon) := U$ *est ouvert*

Donc $f^{-1}(B_Y|y, \varepsilon)) \subset X$ *est ouvert* $(\mathrm{car}\, f(x) = y)$ donc :

$\exists \delta > 0 \quad \mathrm{tq} \quad B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(y, \varepsilon))$

Donc f est continue

Corollaire : - $f : X \to Y$ est continue ssi $\forall S \subset Y$ *ferme* :
$f^{-1}(S) \subset X$ *est ferme*

Preuve : -

$$f^{-1}(Y, S) = Xf^{-1}(S) \qquad \square$$

Exemple : -
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$f(x_1, x_2, x_3) = \exp(x, \sin(x_2) + x_1 \cdot x_3)$ *est continue*
$(0, \infty) = U \subset \mathbb{R}$ *Alors* f^{-1} *est ouvert* $\subset \mathbb{R}^3$ $\{(x_1; x_2, x_3) | f(x_1, x_2, x_3) > 0\}$*ouvert*
$\geq$ *ferme*

- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = xy$:

$$f^{-1}((-\infty, 1)) = \{(x, y) | xy < 1\} \textit{est ouvert}$$
$$f^{-1}(-\infty, 1]) = \{(x, y) | xy \leq 1\} \textit{est ferme}$$

Théoreme : - Soit x un esp métrique :
$U_\alpha \subset X$ *Des sous ensemble ouvert :*
$\alpha \in A$ *(A un sous ensemble, peut etre infini) Alors :*

$$\bigcup_{\alpha \in A} \subset X \textit{ est ouvert}$$

Si $U_1, ..., U_n \subset X$ sont ouverts, alors :

$$U_1 \cap, ..., \cap U_n \quad \textit{est ouvert}$$

Preuve : - Si $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, cad si :

$\exists \beta \in A$tq $x \in U_\beta$, alors :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tq} \quad B(x, \varepsilon) \subset u_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$\Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha$ est ouvert
Six $\in U_1 \cap, ..., \cap U_n$:

$$\forall i = 1, 2, 3, ..., n \quad \exists \varepsilon_i > 0 \quad \text{tq} \quad B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$$

on pose $\varepsilon = \min_{i=1,..,3} \varepsilon_i$

Alors $B(x, \varepsilon) \subset U_i \quad (\forall i)$

donc $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i \quad \square$

Corollaire : - Si $\mathrm{S}_\alpha \subset \mathrm{X}\alpha \in \mathrm{A}$ *sont ferme, alors* :

$\bigcap\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{S}_\alpha$ *est ferme*

Si $\mathrm{S}_1, ..., \mathrm{S}_\mathrm{n}$ *sont ferme alors* :$\mathrm{S}_1 \cup ..., \cup \mathrm{S}_\mathrm{n}$ *est ferme*

Preuve : -

$$\mathrm{X}\backslash \underbrace{\bigcap_{\alpha} \mathrm{S}_\alpha}_{\text{ferme}} = \bigcup_{\alpha} \underbrace{(\mathrm{X}\backslash \underbrace{\mathrm{S}_\alpha}_{\text{ferme}})}_{\text{ouvert}}$$

$$\mathrm{X}\backslash \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_\mathrm{i} = \underbrace{\bigcap_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{X}\backslash \mathrm{S}_\mathrm{i})}_{\text{ouvert}}$$

Exemple : -

$$\{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 > 1 \quad \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 < 2, \mathrm{x}_1 > 0\}. \ \textit{est ouvert}$$

$$\{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 \geq 1 \quad \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 2, \mathrm{x}_1 \geq 0\}. \ \textit{est ferme}$$

L'intersection de 3 sous ensemble ouvert / ferme

Theoreme : - Soit X un espace métrique Alors un sous ensemble S$\subset$ X est ferme ssi pour toute suite

$(\mathrm{s}_\mathrm{n})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ $\mathrm{s}_\mathrm{n} \in \mathrm{S}$ tq $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{s}_\mathrm{n} := \mathrm{x} \in \mathrm{X}$ existe, on a : $\mathrm{x} \in \mathrm{S}$

Exemple : -

$(0,1] \subset \mathbb{R}$

$\mathrm{s}_\mathrm{n} = \frac{1}{\mathrm{n}} \in (0,1] \quad \lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{n}} = 0 \notin (0,1] \quad (0,1]$ *n'est pas ferme*

Preuve du Theoreme : -

- Si $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ *alors existe suite* $(\mathrm{s}_\mathrm{n})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ $\mathrm{s}_\mathrm{n} \in \mathrm{S}$, tq $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{s}_\mathrm{n} = \mathrm{x}$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0) \mathrm{B}(\mathrm{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{S} \neq \emptyset$$

Preuve : - Si $\lim \mathrm{S}_\mathrm{n} = \mathrm{x}$ alors $\lim \mathrm{d}(\mathrm{S}_\mathrm{n}, \mathrm{x}) = 0$,

$$\forall \varepsilon > 0) \quad \exists \mathrm{n}_0 \quad \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \qquad \mathrm{d}(\mathrm{S}_\mathrm{n}, \mathrm{x}) < \varepsilon \quad \mathrm{s}_\mathrm{n} \in \mathrm{B}(\mathrm{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{S}$$

$\Rightarrow \mathrm{B}(\mathrm{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{S} \neq \emptyset$

Si $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \frac{1}{\mathrm{n}}) \cap \mathrm{S} \neq \emptyset$, choississons $\mathrm{S}_\mathrm{n} \in \mathrm{B}(\mathrm{x}, \frac{1}{\mathrm{n}}) \cap \mathrm{S}$
et on a $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{s}_\mathrm{n} = \mathrm{x}$

Il faut montrer : S est ferme ssi $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}$: x satisfait $(*)$

ssi x$\in$ S Mais : S est ferme ssi X\S est ouvert

$$\text{ssi} \quad \forall \mathrm{x} \notin \mathrm{S}) \quad \exists \varepsilon > 0 \mathrm{B}(\mathrm{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{S} = \emptyset$$

$$(\mathrm{x} \in \mathrm{X}\backslash \mathrm{S}) \quad (\mathrm{B}(\mathrm{x}, \varepsilon) \subset \mathrm{X}\backslash \mathrm{S})$$

ssi (x satisfait $(*) \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{S}$) $\square$

Exemple : - $X = B(A) =$ les fonctions $A \to \mathbb{R}$ avec $||\cdot||_\infty$ $(\sup\limits_{a\in A} |f(a)| = ||f||_\infty)$

$\begin{array}{ll} A & = [c,d] \\ S & = C([c,d]) \subset B([c,d]) \end{array}$ une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge dans X ssi elle converge unif

Si $f_n \in S$, et si :

$\lim f_n \in X$ existe, alors $\lim f_n \in S$

(La limite de la fonction uni d'une suite de fonction continue est une fonction continue)

$\Rightarrow S \subset X$ est ferme

Exemple : - $U_n := (-\frac{1}{n}, 1) \subset \mathbb{R}$ est un sous ensemble ouvert :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, 1) = [0,1) \subset \mathbb{R} \quad \textit{n'est pas ouvert}$$

3.5 Espaces Compacts

Rappel : - Si $(x_n)_{n=1}^\infty$ $(x_n \in \mathbb{R})$ est une suite borne, alors $\exists$. sous suite convergente $\Rightarrow$ si f :[a,b]$\to \mathbb{R}$ est cont, alors f atteint son maximum et son min

Définitioon : - un espace métrique X est compact si $\forall$ suite $x_n \in x$ $\exists$ sous suite qui converge

Exemple : - $X=[a,b]$

Théoreme : - Si X est compact et f :X$\to \mathbb{R}$ continue, alors f atteint son max et son min

Preuve : - $\exists$. suite $x_n \in X$:
tq $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\limits_{x\in X} f(x) \quad (\in (-\infty, \infty))$
Soit $y_n \in X$. une sous suite convergente de $(x_n)_n^\infty = 1$

On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(\lim_{n\to\infty} y_n)$$
$$\sup(f)$$

$f(y) = \sup\limits_{x\in X} f(x)$, *donc f atteitn son max en y pour min pareil* $\square$

Theoreme : - Un sous ensemble $S \subset \mathbb{R}^k$ est un espace compact ssi $S\subset \mathbb{R}^k$ est ferme et borné :

(borne : $\exists R > 0$, tq $S \subset B(o,R)$)

Preuve : -

$\Leftarrow$: *supposons que* $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}^k$ *est borne et ferme* *Soit* $\mathrm{x_n} \in \mathrm{S} n = 1, 2, 3...$ *une suite* :

$\mathrm{x_n} = (\mathrm{x_{n1}}, \mathrm{x_{n2}}, \mathrm{x_{n3}}, ..., \mathrm{x_{nk}}) \quad (\mathrm{x_{ni}} \in \mathbb{R})$

S *est borné* $\Rightarrow$: $|\mathrm{x_{n1}}| < \mathrm{R} \quad \forall \mathrm{n}, \mathrm{cad}$ *La suite*$(\mathrm{x_{n1}})_{n=1}^{\infty}$ *est borne*

Soit $\mathrm{y_n}$ *une sous suite de*$\mathrm{x_n}$ tq $(\mathrm{y_{1n}})_{n=1}^{\infty}$ converge Soit $\mathrm{z_n}$ *une suite de* $\mathrm{y_N}$ tq *la suite* :

$\mathrm{z_{n2}}$ converge *on trouve une suite* $\mathrm{w_n}$ de $\mathrm{x_n}$ tq :

$(\mathrm{w_{ni}})_{n=1}^{\infty}$ *converge* $(\forall \mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{k})$, cad $\mathrm{w_n}$ *converge dans* $\mathbb{R}^k$

Mais S est ferme et $\mathrm{w_n} \in \mathrm{S}$,

donc $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{w_n} \in \mathrm{S}$ ($\Rightarrow$: exo) $\square$

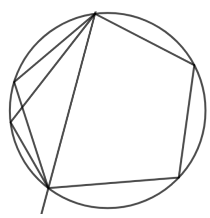
Exemple : -

$$\mathrm{S} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in /\mathrm{R}^2 | \mathrm{xy} \geq 1 \quad \& \, \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \leq 4\}$$

S$\subset \mathbb{R}^2$ est ferme et borne $\Rightarrow$ S est compact :

$$\mathrm{Si} \, \mathrm{f} : \mathrm{S} \to \mathbb{R}, \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sin(\mathrm{x} + \mathrm{e}^{\mathrm{y}}) + \cos(\mathrm{xy}) : \quad \textit{f est continu}$$

Exemple : -



n-gone avec P (n=5)
avec l'aire maximale si P est max alors
les coté ont la meme longueur

cad P est regulier :

$$\exists \mathrm{P} \quad \textit{avec l'aire maximale}$$

P est donné par les sommet $\in \mathrm{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$
on a l'ensemble : $(\mathrm{S}^1)^n \subset (\mathbb{R}^2)^n = \mathbb{R}^{2n}$
ferme et borne $\Rightarrow$ compact l'aire est une fonction continue $\Rightarrow$ max existe

Rappel : -

- Si X est compact et f :X $\to \mathbb{R}$ est continue alors $\exists$ max et min de f
- Si S$\subset \mathbb{R}^n$ est ferme et borne alors S est compact

Theoreme : - Toute les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes

Preuve : - Si N :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une norme, on va montrer que N est equivalent a $|| \cdot ||_1$ $(||\mathrm{v}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{v_i}|)$

- $\mathrm{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{v_i} \mathrm{e_i}$, $\mathrm{e_i}, ...$ la base de $\mathbb{R}^n$

$$N(v) \leq \sum_{i=1}^{n} N(v_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |v_i| N(e_i) \leq \left(\max_{i=1\ldots n} N(e_i)\right) \cdot ||v_i||$$

L'autre inégalité : Montrons que N :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue :

Si $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$|N(u) - N(v)| \leq N(u - v) \leq C_1 \cdot ||u - v||_1$$

cad N : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, donc continue :

Posons $S := \{v \in \mathbb{R}^n | ||v||_1 = 1\}$ S est ferme et borne $\Rightarrow$ S est compact

$\Rightarrow \exists v_0 \in S$ tq $N(v_0)$ est minimal cad :

$$\forall v \in S, \quad N(v) \geq N(v_0)$$

Car $||v_0||_1 = 1$,. on siat que $v_0 \neq 0$ donc $N(v_0) > 0$

Si $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$ alors $\frac{w}{||w||_1} \in S$ et donc $N(\frac{w}{||w||_1} \geq N(v_0)$, donc :

$||w||_1 \leq \frac{1}{N(v_0)} \cdot N(w)$ □

3.6 Espace complets

Définition : - Si X est un espace métrique et si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans X alors $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall k, l \geq n_0) \quad d(x_k, x_e) < \varepsilon$$

Exercice : - si une suite converge alors elle est de Cauchy

Définition : - X est complet si toute suite de Cauchy dans X converge

Proposition : - Si X est complet et si $S \subset X$ est ferme, alors S est complet

Preuve : - Si $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans S, alors cette suiite converge dans X (car X est complet) Car S$\subset$ X est ferme, on a que $\lim_{n\to\infty} s_n \in S$ □

Exemple : -
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^k$ [preuve : si $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dan s$\mathbb{R}^k$, alors les suites dans $\mathbb{R}$ $(v_{ni})_{n=1}^{\infty}$ (i=1,...,k) sont de Cauchy, donc elles convergent et donc la suite $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ converge]
- Si X est compact alots il est complet (eco)
- Si A est une ensemble :

$$B(A) = \{f : A \to \mathbb{R} | f \text{ est borne}\} \qquad \textit{avec la norme } || \cdot ||_{\infty}$$

B(A) est complet (le critere de Cauchy)
— C([a,b])$\subset$ B([a, b]) est un sous ensemble ferme $\Rightarrow$ C([a,b]) est complet

4 Equation differentielle ordinaire

4.1 Introduction :

La vitesse du chien :
$$\frac{(v,0)-(x(t),y(t))}{\sqrt{(tv-x(t))^2+y(t)^2}}=\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)$$

Si (x(0),y(0)) (position vertical) est connue, il faut trouver les fonction x(t),y(t)

$m\,\frac{d^2y}{dt^2}=-k\cdot y-l\frac{dy}{dt}$

Le probleme : si y(0) et y'(0) sont connu trouver la solutions y(t)

Définitions : - Soit f :$\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ une fonction continue

Alors l'équations y'(t) = f(t,y(t)) pour une fonction y :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ est une equation diff ord (EDO) (d'ordre 1)

Dans les composantes : si $y(t)=(y_1(t),...,y_n(t))$ $y_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et si f=$(f_1,...,f_n)$ alors, $(*)$ est $y_i'(t)=f_i(t,y_1(t),y_2(t),...,y_n(t))$ $(\forall i=1,2,...,n)$

Probleme de la valeur initiale : - trouver fonction y :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ si $y(t_0)\in\mathbb{R}^n$ est donné

Theoreme : -

$$(\forall c\in\mathbb{R}^n)(\forall t_0\in\mathbb{R})(\exists\varepsilon>0)\quad\exists y:(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$$

tq $y(t_0)=c$ et y'(t)=f(t,y(t)) $(\forall t\in(t_0\varepsilon,t_0+\varepsilon))$ si f est localement lipschitzienne, alors y est unique

Preuve : - Analyse 2

L'idée de la preuve :

construire une solution aproximative y_n

Pour h> 0 (très petit :)

$y_n(t_0):=c$ $y_n(t_0+h)=y_n(t_0)+h\cdot f(t_0,y_n(t_0))$ $y_n(t_0+(n+1)h)=y_n(t_0+nh)+hf(t_0+nh,y_n(t_0+nh))$ et on prend l'interpretation linéaire

Il faut montrer : dans la suite $(y_{\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty}\exists$ une sous suite convergente et que sa limite est me solution de y'(t) = f(t,y(t)) $\square$

Remarque : - Une EDO d'ordre k est :

$$\frac{d^ky(t)}{dt^k}=f(t,y(t),\frac{dy}{dt},...,\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}$$

Le probleme initial : trouver y(t),y'(t_0), ...$y^{(k-1)}(t_0)$ sont donnés

On peut transformer cette EDO d'ordre k en EDO d'ordre 1 :

On pose Y=$(y_1,p_1,p_2,...,p_{k-1})$ et $\frac{dy}{dt}(t)=p_1(t)$

$\frac{dp_1}{dt}(t) = p_2(t)$

$\frac{dp_{k-2}}{dt}(t) = p_{k-1}(t)$

$\frac{dp_{k-1}}{dt} = f(t, y(t), p_1, ..., p_{k-1}(t))$

On a donc trouver une EDO : $\frac{dY(t)}{dt} = F(t, Y(t))$

4.2 Methode de solution

4.2.1 4.2.1 EDO autonomes :

Definition : -

Définition : -
Les EDOs autonomes sont les EDO de la forme $y'(t) = f(y(t))$, où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue donnée.

Solution pour le cas $n = 1$ **:** -

$y'(t) \overset{(*)}{=} f(y(t))$Si $f \neq 0$

$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1$

Puis si H est une fonction primitive de $\frac{1}{f}H' = \frac{1}{f}$, alors

$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = H(y(t))'$

Donc $(*)$ est $H(y(t))' = 1$, c'est à dire : $H(y(t)) = t - c$ et donc $y(t) = H^{-1}(t - c)$

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \iff \int \frac{dy}{f(y)} = \int dt = t - c$$

Si $y_0 \in \mathbb{R}$ est tel que $f(y_0) = 0$ alors la fonction constante $y(t) = y_0$ et une solution.

Exemple : -

$$f(y) = 1 + y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dt \Rightarrow \arctan(y) = t - c \Rightarrow y(t) = \tan(t - c)$$

$y(t)$ est définie sur $(c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2})$

$$f(y) = y^{\frac{2}{3}} \qquad y' = y^{\frac{2}{3}}$$

$$\int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int dt = t - c \Rightarrow y(t) = \left(\frac{t - c}{3}\right)^3$$

Pour $y = 0$ on a $f = 0$ $(f(0) = 0) \Rightarrow y(t) = 0$ est aussi une solution. La solution générale :

Proposition Si $a \in \mathbb{C}$ alors les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de $y' = ay$ sont $y(t) = ce^{at}, \quad c \in \mathbb{C}$

démonstration : -
Posons $z(t) := y(t)e^{-at}$, c'est à dire $y(t) = z(t)e^{at}$. On a :

$$y'(t) = \left(z(t)e^{at}\right)' = \left(z' + az\right) e^{at} = aze^{at}$$

C'est à dire $z' = 0 \Rightarrow z$ est constante.

4.2.2 Séparation de variables

EDO de la forme $y'(t) = f(y(t)) \cdot g(t)$ pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données.

Solution

$$\frac{dy}{dt} = f(y)g(t) \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)\ dt$$

Et donc on trouve $y(t)$

Exemple : - $y' = ty \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = \int t\ dt \rightsquigarrow \log|y| = \frac{1}{2}t^2 + c \rightsquigarrow y = \pm e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^c$, c'est à dire $y(t) = \tilde{c} \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}$ pour $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ arbitraire.

4.2.3 EDO linéaires d'ordre 1

Si $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont données, on cherche les solutions de $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si $b = 0$, l'EDO est séparable :

$$y' = a(t)y(t) \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(t)\ dt \Rightarrow y(t) = \exp(A(t))\text{où } A'(t) = a(t)$$

est une solution. La solution générale est $y(t) = c \cdot \exp(A(t))$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Si $b \neq 0$:

On pose

$$z(t) = y(t) \cdot \exp(-A(t))$$

C'est à dire

$$y(t) = z(t) \exp(A(t))$$
$$y'(t) = z'(t) \exp(A(t)) + z(t) \cdot a(t) \exp(A(t)) \stackrel{!}{=} a(t)y(t) + b(t)$$

C'est à dire

$$z'(t) = b(t) \exp(-A(t)) \Rightarrow z(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\ dt + c$$
$$\Rightarrow y(t) = e^{A(t)} \cdot \left(c + \int b(t)e^{-A(t)}\ dt\right)$$

Exemple : -

$$\begin{aligned} y'(t) &= ty + t \qquad A(t) = \tfrac{t^2}{2} \\ z(t) &= \int t \cdot \exp\left(-\tfrac{t^2}{2}\right) \, dt = -\left(t^2+2\right)\exp\left(\tfrac{t^2}{2}\right) + c \\ y(t) &= -\left(t^2+2\right) + c \cdot \exp\left(\tfrac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

4.2.4 Les EDO homogènes et la méthode d'une symétrie

EDO hom : $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$

On pose $z(t) = \frac{y(t)}{t}$, c'est à dire $y(t) = z(t) \cdot t$.

$$y' = (z(t)t)' = z't + z = f(z) \Rightarrow t\frac{dz}{dt} = f(z) - z \text{est séparable} \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dz}{t}$$

Exemple : -

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \tfrac{y}{t} + \tfrac{t}{y} \\ t \cdot z' + \cancel{z} &= \cancel{z} + z^{-1} \\ \int z \, dz &= \int \tfrac{dt}{t} \\ \frac{1}{2}z^2 &= \log|t| + c \\ z(t) &= \sqrt{2\log|t| + c} \\ y(t) &= t \cdot \sqrt{2\log|t| + c} \end{aligned}$$

Méthode d'une symétrie une EDO autonome $\frac{dy}{dt} = f(y)$ a une symétrie $\begin{array}{ccc} y & \to & y \\ t & \to & t+c \end{array}$

Si on a une EDO avec une autre symétrie : par exemple une EDO homogène $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$ la symétrie : $\left.\begin{array}{ccc} y & \to & cy \\ t & \to & ct \end{array}\right\} (\star)$

On cherche des nouvelles variables $y, t \rightsquigarrow z, s$ pour que $(\star)$ devienne $\begin{array}{ccc} z & \to & z \\ s & \to & s+\lambda \end{array}$ Une EDO autonome.

On prend : -

$$\begin{aligned} &z = \frac{y}{t} \quad s = \log(t) \quad y = e^s z \quad t = e^s \\ &\rightsquigarrow \frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right) \rightsquigarrow \frac{dz}{ds} = g(z) \\ &\text{effectivement} \frac{dy}{dt} = \frac{d(e^s z)}{de^s} = \frac{e^s z \, ds + e^s \, dz}{e^s \, ds} = \frac{dz}{ds} + z = f(z) \\ &g(z) = f(z) - z, \qquad z = \frac{y}{t^2} \end{aligned}$$

Exemple $\frac{dy}{dt} = t + \frac{y^2}{t^3} \rightsquigarrow \frac{dz}{ds} = g(z)$

$\begin{array}{ccc} y & \to & c^2 y \\ t & \to & ct \end{array}$ est une symétrie. (exo.)

4.2.5 Réduction d'ordre

Si $y'(t) = f(y(t)) \quad (*)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une EDO autonome : on peut remplacer $(*)$ par une EDO non-autonome dans $\mathbb{R}^{n-1}$

L'idée : on cherche d'abord $y_i \quad (i = 2, \ldots, n)$ comme des fonctions de y_1 (la réduction).

Après on va trouver $y_1(t) \quad (i = 2, \ldots, n)$

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, y_n)$$
$$\downarrow$$
$$\frac{dy_i}{dy_1} = \frac{f_i(y_1, \ldots, y_n)}{f_1(y_1, \ldots, y_n)} \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

Exemple : -

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2$$
$$\frac{dy_2}{dt} = -y_1$$
$$\downarrow$$
$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{y_1}{y_2}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int y_2 dy_2 = -\int y_1 dy_1 \\ y_2^2 + y_1^2 = cst = R^2 \\ y_2 = \sqrt{R^2 - y_1^2} \\ \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 = \sqrt{R^2 - y_1^2} \end{cases}$$

$$y_1 = R\sin(t-c) \qquad \& \qquad y_2 = R\cos(t-c)$$

Exemple : -

$$\frac{dy}{dt} = t + \frac{y^2}{t^3}$$

$y \to c^2 y$

$t \to ct$

4.2.6 Reduction d'ordre :

Si $y'(t) = f(y(t)$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

EDO autonome : On peut remplacer (*) par une EDO non-autonaome dans $\mathbb{R}^{n-1}$

on cherche d'abord :- $y_i (i = 2, ..., n)$ comme des fonctions de y_i (la reduction)
Apres on va trouver aussi : $y_i(t) \quad (i = 2, ..., n)$

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1 y_2 ... y_n)$$
$$\downarrow \quad (i = 1, ..., n)$$
$$\frac{dy_i}{dy_1} = \frac{f_i(y_n, \ldots, y_n)}{f_n(y_1, \ldots, y_n)} \underbrace{(i = 2, ..., n)}_{n-1}$$

4.3 EDO linéaire a coeficiant constant

Si $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ *on cherche les solutions :*$y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *de :*

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

observation : - $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ est une aplication linéaire cad :

$$\begin{array}{ll} L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 & \\ L(\alpha y) = \alpha Ly & \forall y_1, y_2, y \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{C} \end{array}$$

Proposition : - Les solutions y de Ly=0 forment un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$

Preuve : -

— Si Ly=0, alors y$\in C^\infty(\mathbb{R})$:
y est n fois différentiable :

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - ... - a_0 y$$

On repete cet argument :

$$y^{(n+1)} = -a_{n-1}y^{(n)} - ... - a_0 y'$$

etc { les solution de Ly=0 } $\subset C^\infty(\mathbb{R})$ est = Ker L, qui est un esp vectoriel

Theoreme : - (probl de val initial)

SI $c_0, c_1, ..., c_{n-1} \in \mathbb{C}$ sont donnés, alors $\exists!$ y tq

$$Ly = 0 \quad \text{et} \quad y^{(k)}(0) = c_k \quad (\forall k = 0, ..., n-1)$$

<u>preuve plus tard</u>

Remarque : - La dimension de l'espace des solutions de Ly=0 est n

(car $\forall$ c$\in \mathbb{C}$ $\exists!$ y, cad on a une bijection linéaire entre $\mathbb{C}^n$ est l'espzce de solution)

Définition : - Le polynôme caractéristique de L est :

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0}$$

S'ou cela vient ?

- L $e^{\lambda t} = p(\lambda)e^{\lambda t}$
- si D: $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ est donné par Dy = y' $\qquad L = p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_0$

Observation : - Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tq $p(\lambda) = 0$ alors ; $Le^{\lambda t} = 0$, donc $e^{\lambda t}$ est un solution

$\Rightarrow$ si $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont les racines de p et si $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}$ alors
$\alpha_1 e^{\lambda 1 t} + ... + \alpha_k e^{\lambda k t}$ est un solution (car les olution forment un espace vectoriel)

Theoreme : - si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n1}....(\lambda - \lambda_k)^{nk}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j)$ est le polynome caractéristique de L, alors les solution de Ly=0 sont :

$$y(t) = q_1(t)e^{\lambda 1 t} + ... + q_k(t)e^{\lambda k t}$$

ou q_i *est un polynome de degre* $\leq n_i - 1$

Les polynome q_i sont uniquement déterminés par y, et donc :

$$\{t^l e^{\lambda i t} \quad | \quad 1 \leq i \leq k, 0 \leq l \leq n_i - 1\}$$

est une base de l'espace des solutions

Remarque : - si $n_i = 1 \quad \forall i$,. cad si k=n, alors les solutions sont :

$$\alpha_1 e^{\lambda 1t} + ... + \alpha_n e^{\lambda nt}$$

Exemples : -

$$\begin{aligned}
&y" + y = 0\\
&p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)\\
&\text{racines } = \pm i \quad (\text{multipliciter } = 1)\\
&\Rightarrow \text{les solutions sont } \alpha_1 e^{eit} + \alpha_2 e^{-it}\\
\text{rapellons : } &e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin t\\
&e^{-it} = \cos t - i \sin t\\
&= \beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t \quad (= \gamma \cos(t - c))
\end{aligned}$$

$$y" - ay' + y = 0 \quad a \geq 0$$

$$\begin{aligned}
p(\lambda) \quad & = \lambda^2 + a\lambda + 1\\
\lambda_{1,2} \quad & = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}\\
\text{si } a < 2 \quad \lambda_{1,2} & = \frac{-a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2}\\
\Rightarrow \quad & y(t) = e^{-\frac{1}{2}at}(\alpha_1^{e\sqrt{4-a^2}t} + \alpha_2 e^{\frac{-i}{2}\sqrt{4-a^2}t}\\
& = e^{-\frac{1}{2}at}
\end{aligned}$$

$$(\beta_1 \cos \frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}t + \beta_2 \cos \frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2}t)$$

Si $a > 2$ alors $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ solution $\alpha_1 e^{\lambda 1t} + \alpha_2 e^{\lambda 2t}$

si a = 2 : $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ racine double $\lambda_1 = -1$

$\Rightarrow$ solution est $y(t) = (\lambda + \beta t) \cdot e^{-t}$

Proposition : - (Si $p(\lambda) = \lambda^n$)

Les solutions de $y^{(n)} = 0$ sont les polynôme de degrés $\leq$ n-1

Preuve : - Par récurrence :

$n = 0 \quad$ vrai

$n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}
& \text{si } y^{(n+1)} = 0, \text{alors } (y')^{(n)} = 0,\\
\Rightarrow \quad & y' \text{ est un polynôme de degré } \leq n - 1 \text{ cad } y \text{ est une fonction primitive d'un polynôme}\\
& \text{ de degrés } \leq n - 1\\
\Rightarrow \quad & y \text{ est un polynôme de degrés } \leq n \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition : - (si $p(\lambda - c)^n, c \in \mathbb{C}$) :

Les solutions de $(D\text{-}c)^n y = 0$ (ici $Dy := y'$) sont $q(t)e^{ct}$, ou q est un polynôme de degrés $\leq n - 1$

Preuve : - Observons que $D(e^{-ct} \cdot y(t)) = (e^{-ct}$

$$\begin{aligned} &= (y'(t) - cy(t)) \cdot e^{-ct} \\ &= e^{-ct}(D - c) \cdot y(t) \Rightarrow D^n(e^{-ct}y) \\ &= e^{-ct}(D - c)^n y \end{aligned}$$

Donc $(D - c)^n y = 0$ ssi
$D^n(e^{-ct}y) = 0$ ssi $e^{-ct}y(t) = q(t),$ ou q est un poly de degré $\leq n - 1$ $\square$

Proposition : - Si V est un espace vectoriel :

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n1}...(\lambda - \lambda_k)^{nk} \quad \textit{un polynome}$$

et D : V → V une aplication linéaire alors les solutions v∈ V de $p(D)v = 0$ sont :

$$v = v_1 + ... + v_k \quad \text{ou} \quad (D - \lambda_i)^{ni} v_i = 0$$

De plus le v_i sont uniquement détermnier par v

$$\Rightarrow \text{Ker } p(D) = \ker(D - \lambda_1)^{n1} \oplus ... \oplus \text{Ker}(D - \lambda_k)^{nk})$$

Preuve : - on utilise la décomposition en fractions partielles :

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{s_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n1}} + ... + \frac{s_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{nk}} \begin{cases} \text{Si } (\lambda)\text{polynome} \\ \text{de degr} \leq n_i - 1 \end{cases}$$

implication par $p(\lambda\ )$:

$$1 = \underbrace{\frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n1}} s_1(\lambda)}_{r_1(\lambda)} + ... + \underbrace{\frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{nk}} s_k(\lambda}_{r_k(\lambda)}$$

r_i est un polynôme, $r_i(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_i)^{ni} = s_i(\lambda)p(\lambda); \quad r_1 + ... + r_k = 1$
si $p(D)v = 0$
alors on pose $v_i := r_i(D)v$
$v = v_1 + ... + v_k$ car $r_1 + ...r_k = 1$

$$(D - \lambda_i)^{ni} v_i = (D - \lambda_i)^{ni} r_i(D)v$$

si (D) $\underbrace{p(D)v}_{0} = 0$

Il faut encore vérifir 2 choses :

— Si $v_1, ...v_k \in V$ sont tq $(D\text{-}\lambda_i)^{ni} v_i = 0$ alors

$$p(D)(v_1 + ... + v_k) = 0 \quad \begin{cases} \text{mais} & p(D)v_i = 0 \\ \text{et donc} & p(D) \sum v_i = 0 \end{cases}$$

si $v = \sum_{i=1}^{k} v_i,\ (D\text{-}\lambda_i)^{ni} v_i = 0$

alors les v_i *sont uniquement determiner par v : en fait*

$v_i = r_i(D)v,$ car r_i(D)$v_j = 0$

(car $(\lambda-\lambda_j)^{ni}|r_i(\lambda))i \neq j$ et donc :

$$\begin{aligned} r_i(D)v &= r_i(D)(v_1+...+v_k) \\ &= r_i(D)v_i = \underbrace{r_1(D)+...+r_k(D)}_{1})v_i \\ &= v_i \qquad \square \end{aligned}$$

Preuve du theorme : - On applique la porposition précédente avec V= $C^\infty(\mathbb{R})$

Rappel : -

$$\underbrace{y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_0y}_{Ly=P(D)y} \overset{(*)}{=} 0$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_0 \\ &= (\lambda-\lambda_1)^{n1}...(\lambda-\lambda_k)^{nk} \end{aligned}$$

Les solution de $(*)$:

$$y(t) = q_1(t)e^{\lambda 1t}+...+q_k(t)e^{\lambda kt}$$

q_i polynôme

deg $q_i \leq n_i - 1$

Si b(t) est une fonction donnés, trouver les solutions de :

$$Ly = b \quad \textit{EDO linéaire inhomogène)}$$

Proposition : - Si $y_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une solution de : $Ly_0 = b$ alors la solution générale de $Ly = b$ est :

$$y = y_0 + y_1, \quad \textit{ou} \quad Ly_1 = 0$$

Preuve : - Ly =b $\Leftrightarrow$ Ly=Ly_0 $\quad \Leftrightarrow L(\underbrace{y-y_0}_{y_1}) = 0 \square$

Comment trouver une solution de Ly=b ?

Méthode générale : -

-variation des constante
-plus tard

Solution si :

$$b(t) = R(t)e^{\alpha t} \quad R(t) \text{ polynme}$$

Méthode : -

- Si $p(\alpha) \neq 0$ alors $\exists$ solution de la forme

  $y(t) = S(t)e^{\alpha t}$; ou S est un polynôme et deg S= deg R

- Si α est une racine de p de multiplicté m alors $\exists$ solution de la forme

  $y(t) = t^m S(t)e^{\alpha t}$ (deg S = deg R)

Preuve : - si $p(\alpha) \neq 0$ $\quad R(t) \cdot e^{\alpha t} \in \mathbb{C}[t]$:

$$\mathbb{C}[t]_{deg \leq l)} \cdot e^{\alpha t} \xrightarrow{L} \mathbb{C}[t]_{(deg \leq l)} \cdot e^{\alpha t}$$

injective $\Rightarrow$ bijective

Probleme : - Résoudre

$$y'(t) = Ay(t) + b(t)$$

si b :$\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est donné

méthode variation de constantes :

(deja vu pour : $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$)

On pose :

$$\begin{aligned}
& y(t) = e^{tA} z(t) \quad z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \\
& (z(t) = e^{-tAy(t))} \\
y'(t) \quad & = \cancel{\underbrace{Ae^{tA} z(t)}_{y(t)}} + e^{tA} z'(t) \\
& \stackrel{!}{=} \cancel{Ay(t)} + b(t) \\
z'(t) \quad & = e^{-tA} b(t) \\
\Rightarrow z(t) \quad & = \int e^{-tA} b(t) dt + c \quad c \in \mathbb{C}^n \\
y(t) \quad & = e^{tA} \int e^{-tA} b(t) dt + e^{tA} c
\end{aligned}$$

Reamrque : - Comment resoudre :

$$ty\frac{d+}{da}_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y \stackrel{*}{=} b(t)$$

$b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction donnée :

on peut transformer en un système d'orde 1 et et on applique la variation les constantes

4.4 Systeme d'EDO lineaire a coeficient constant

A matrice $n \times n$ (élément $\in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$) on cherche une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de y' = Ay

cad si $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}$ on veut :

$y'_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j$ (y_i ; $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$)

Proposition : - Les solutions de $(*)$ forment un espace vectoriel cad si y et y' sont des solutions et si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $\alpha y + \beta(y')$ est une solution

Preuve : - $(\alpha y + \beta(y'))' =$

$$=\alpha(y') + \beta(y')' = \alpha Ay + \beta A(y')$$
$$=A(\alpha y + \beta(y')) \quad \square$$

Theoreme : - (Probleme de la valeur inititale :) $\forall v \in \mathbb{C}^n$

$\exists!$ solution y de y' = Ay tq y(0) = v

Preuve : - plus tard

Proposition : - Si $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A, $Av = \lambda v$, alors $y(t) := e^{\lambda t}$ v est une solution

Preuve : - y'= $(e^{\lambda t})'v = \lambda y, Ay = e^{\lambda t}v =$

$$\begin{aligned} &= e^{\lambda t}Av = e^{\lambda t} \cdot \lambda v \\ &= \lambda y \\ &= y' = Ay \qquad \square \end{aligned}$$

Proposition : - Si A est diagonalisable cad si $\exists$ une base $v_1, ..., v_n$ de $\mathbb{C}^n$ tq les v_i sont des vecteurs propre de A_1 alors la solution génér l de y'=Ay est :

$$y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda 1t}v_1 + ... + c_n e^{\lambda nt}v_n$$

$(c_i \in \mathbb{C}, \qquad Av_i = \lambda_i v_i)$

Preuve : - Si $v \in \mathbb{C}^n$, alors

$\exists c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ tq $\quad v = c_1 v_1 + ... + c_n v_n$

Alors

$$y(t) = c_1 e^{\lambda 1t}v_1 + ... + c_n e^{\lambda nt}v_n$$

est une soltuion et y(0)=v_1 cad y(t) est solution (unique) de

y' = Ay avec la solution inital v $\square$

exemple : - $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

polynôme car de A $\cdot p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$

$\Rightarrow$ A est diagonalisable valeur propre $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2' \end{cases}$ vecteur propre

$$\lambda_1 = -1 \qquad A - 2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Av_1 = -v_1$$

$$\lambda_2 = 2 : \qquad A + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Av_2 = 2v_1$$

solutions générale de y'=Ay est $\quad c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^{2t} v_2 \ (c_1 c_2 \in \mathbb{C})$

Trouvosn une solutions y(t) tq $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3}$$

donc $\quad y(t) = -\frac{1}{3} e^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple : - $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Polynome caracteristique : -

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

valeur propre : $\quad \lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i \qquad$ (A diagonalisable)

Vecteur propre : -

$\lambda_1 = i \quad A + i = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ la solution général et $y(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$y(t) =$ tq $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} \\ ie^{it} - ie^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

dessin pour n=2 (matrice 2×2 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \quad \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Resumer anexes pour ordre 1 : -

$$y'(t) = d(t) y(t) + b(t)$$
$$y'(t) = \frac{2}{t^3 - t} y(t) + t^2$$
$$*(y')'(t) = \frac{2}{t^3 - t}(y')(t) \rightsquigarrow (y') = \frac{1}{2} \frac{(t^2 - 1}{t^2} (= CA(x))$$

on a : $\quad y' = a(x) y + b(x)$

$\quad (y')' = a(x)(y')$

Comment résoudre cet equation si A n'est pas diagonalisable ?

Définition : - Si A$\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ alors

$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

Exemple : - soit A$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = -1, A^3 = -A, A^4 = 1, A^5 = A, ...$

$$\begin{aligned}
\exp(tA) \quad &= 1 + tA - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}A + \frac{t^4}{4!} + ... \\
t \in \mathbb{R} \quad &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ...\right) + A\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ...\right) \\
&= \cos t + \sin t \cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

il faut montrer que (∗) converge $\forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *Posons :* $\quad ||A||_1 = \sum_{i,j} |A_{i,j}|$

Proposition : - $||AB||_1 \leq ||A||_1 \cdot ||B||_1$

Preuve : -

$$\begin{aligned}
||AB||_1 \quad &= \sum_{i,j} |(AB)_{i,j}| = \\
&= \sum_{i,j} \left| \sum_k A - i, k \cdot B_{k,j} \right| \leq \\
&= \sum_{i,j,k} |A_{i,j}||B_{kj}| \leq \sum_{i,j,k,l} |A_{ik}||B_{lj}| \\
&= ||A||_1 \cdot ||B||_1 \quad \square
\end{aligned}$$

Theoreme : - $\forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ la série $\sum_{0=\infty}^{k} \frac{A^k}{k!}$ converge (dans $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n2}$)

Preuve : - Il faut montrer $\forall i, j$ que

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

Propriété de exp A : -

- $\exp 0 = 1$
- $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$
  si $AB = BA$ (preuve : voir la preuve $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$)
  En particulier si $s,t \in \mathbb{C}$ alors $\exp((s+t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$
  Aussi : $\exp(A) \cdot \exp(-A) = 1$
- si $\mathbb{Q}$ est une matrice inversible alors $\exp(QAQ^{-1}) = Q \cdot \exp A \cdot Q^{-1}$
)aprce que $(QAQ^{-1})^n = QA^nQ^{-1}$

Proposition : - $\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$

Preuve : - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \exp(tA)$

est une série entière (avec variable t) qui converge $\forall t \Rightarrow$ on peut différentier terme par terme

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \quad \frac{d}{dt}\exp(tA) \\ = & \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k \cdot t^{k-1} \\ = & \quad A \exp(tA) \quad \square \end{aligned}$$

Theoreme : Si $A \in (\mathbb{C})$ et si $v \in \mathbb{C}^n$ alors $\exists!\ y \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ tq $y(0) = v$ et $y'(t) = Ay(t)$

En fait : $y(t) = \exp(tA)v$

Preuve : - Montrons que $y(t) := \exp(tA)v$ est une solution :

$y(0) = v$ ✓

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}\exp(A)v = A\exp(tA)v = Ay(t) ✓$$

L'unicité :

Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ posons

$z(t) := \exp(-tA)\ y(t)$, cad

$y(t) := \exp(tA)\ z(t)$, donc $\frac{d}{dt}y(t) = A\exp(tA)z(t) + \exp(tA)z'(t)$

$$Ay(t) + \exp(tA)z'(t)$$

donc $y' = Ay$ ssi $z' = 0$ ssi z est constante $\square$

Remarque : - Prop val-initiale de :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0(*)$$

remplaçons $(*)$ par un systeme d'ordre 1 :

y'$=p_1$
$p_1' = p_2$
$\vdots$
$p_{n-2}' = p_{n-1}$
$p_{n-1}' = a_{n-1}p_{n-1} + ... + a_1 p_1 + a_0 y$
cad :

$$Y'(t- \overset{(t)}{=} AY(t) \quad \text{ou} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\forall v \in \mathbb{C}^n$ le systeme (t) a une unique solutions avec $Y(0) = v$ cad si :

$v = (c_0, c_1, ..., c_{n-1})^T$ on peut dire que $(*)$ a une unique solution y tq

$$y^{(k)}(0) = c_k \qquad \forall k = 0, 1, ..., n-1$$

Sous remarque :

$\det(\lambda - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$

probleme : comment calculer exp(A) ?

- si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \lambda_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale
- $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda n} \end{pmatrix}$
- si $A = Q \bigwedge Q^{-1}$ $\bigwedge$ diagonal (cad A st diag)
  exp A $= \exp(Q \bigwedge Q^{-1}) = Q\exp(\bigwedge)Q^{-1}$
- $A = \bigwedge + N$
  et si $N \bigwedge = \bigwedge N$:

$$\exp A = \exp(\bigwedge + N) = \exp \bigwedge \cdot \exp N$$

$$\exp \bigwedge \cdot \left(1 + N + \frac{N^2}{2} + ... + \frac{N^{n-1}}{(n-1)'}\right) \text{ par ex : } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\bigwedge = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\exp(tA) = \exp(t\bigwedge)\exp(tN) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \cdot (1 + tN) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rappel : - (Theoreme de Cayley-Hamilton)

si $p(\lambda) = \det(\lambda - A)$ est le polynome car de A alors $p(A) = 0$

Méthode pour calculer exp(tA) : -

1. Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n1} ... (\lambda - \lambda_k)^{nk}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ on cherche des polynome $r_1(\lambda)_1, ..., r_k(\lambda)$ tq

   $r_1 + ... r_k = 1$

   et tq $p(\lambda) | r_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{ni}$ comment trouver les r_i

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{s_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n1}} + ... + \frac{s_k(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{nk}}$$ decomposition en facteur partiel

- car p(A) = 0, on a aussi que

  $(A\text{-}\lambda_i)^{ni} r_i(A) = 0 (= p(A)\ si(A))$

- on peut maintenant calculer

  $\exp(t)\ r_i(A) = \exp(t\lambda_i) \cdot \exp(t(A - \lambda_i)) \cdot r_i(A)$

  $= e^{t\lambda_i} \sum_{0=n_i-1}^{l} \frac{t^l}{l!} (A - \lambda_i)^l \cdot r_i(A)$

donc $1 = \underbrace{\sum_{1=k}^{i} \frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{ni}} s_i(\lambda)}_{r_i(\lambda)}$

Finalement $\exp(tA) = \exp(tA)\ (r_1(A) + ... + r_k(A))$

$$\sum_{1=k}^{i} e^{t\lambda i} \sum_{0=n_i-1}^{l} \frac{t^l}{l!} (A - \lambda_i)^l r_i(A)$$

Remarque : - $n_i = 1 (\forall i) \Rightarrow e^{tA} = \sum_{1=n}^{i} e^{t\lambda i} r_i(A)$

Exemple : - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(\lambda - 2)(\lambda + 3)} = \frac{1/5}{\lambda - 2} - \frac{1/5}{\lambda + 3}$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$

$$r_1(\lambda) = \frac{1}{5}$$

Probleme : - Résoudre

$$y'(t) = Ay(t) + b(t)$$

si b :$\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ est donné

méthode variation de constantes :

(deja vu pour : $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$)

On pose :

$$
\begin{aligned}
& y(t) = e^{tA} z(t) \quad z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \\
& (z(t) = e^{-tAy(t))} \\
y'(t) \quad & = \underbrace{\cancel{Ae^{tA} z(t)}}_{y(t)} + e^{tA} z'(t) \\
& \overset{!}{=} \cancel{Ay(t)} + b(t) \\
z'(t) \quad & = e^{-tA} b(t) \\
\Rightarrow z(t) \quad & = \int e^{-tA} b(t) dt + c \quad c \in \mathbb{C}^n \\
y(t) \quad & = e^{tA} \int e^{-tA} b(t) dt + e^{tA} c
\end{aligned}
$$

Remarque : - Comment resoudre :

$$
ty \frac{d+}{da}_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y \overset{*}{=} b(t)
$$

b : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction donnée :

on peut transformer en un système d'orde 1 et et on applique la variation les constantes

4.5 Système d'EDO linéaires générales

Probleme : - resoudre y'(t)$\overset{*}{=}$ A(t)y(t)

A : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ est une fonction donnés (on cherche y :$\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$) tq $y(0) = v \in \mathbb{C}^n$

L'idée : on va construire une suite $y_0, y_1, y_2 ... \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de "solution aproximative" de $*$ et finalement on trouve y(t) comme $\lim_{n \to \infty} y_n(t)$

On pose : $y_0(t) = v \in \mathbb{C}$

$y_1(t)' = A(t) y_0(t), y_1(0) = v$

cad $y_1(t) = \int$

Autrement dit : on construit $M_0(t), M_1(t), ... M_2(t)..$ matrice $n \times n$tq $y_k(t) = M_k(t) v$

Par : $M_0(t) = 1$

$M_1'(t) = A(t) M_0(t), M_i(0) = 1$

cad $M_1(t) = 1 \int_0^t A(s) M_{k-1}(s) ds$

On va montrer que :

$$
M(t) := \lim_k \infty
$$

Theoreme : - (On suppose que A : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ est continue) La suite des fonctions :

$$
M_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n} \textit{ converge ponctuellement}
$$

et cette convergene est unif sur [-N,N] ($\forall N > 0$) La limite $M(t) := \lim_{k \to \infty} M_k(t)$

satisfait : $M'(t) = A(t) M(t)$ et $M(0) = 1$

Preuve : - (l'idée : utiliser le critère de Weirstrass)

$$\mathrm{M_k(t) - M_{k-1}(t)||_1 = \left\| \int_0^t A(s)(M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s))ds \right\|_1}$$

$\mathrm{\leq \left| \int_0^t \|A(s)\|_1 \cdot ||M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)||_1 ds \right|}$ si $\mathrm{t \in [-N, N]}$

$\mathrm{\leq ||M_k(t) = M_{k-1}(t)||_1}$

On a : $\mathrm{||M_0(t) - M_{-1}||_1 = n}$

k=1 :

$$\mathrm{||M_1(t) - M_0(t)||_1 \leq C_N \left| \int_0^t n\ ds \right| = nC_N|t|}$$

k=2

$$\mathrm{||M_2(t) - M_1(t)||_1 \leq C_N \left| \int_0^t nC_N|s|ds \right| = nC_N^2 \tfrac{|t^2|}{2}}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{||M_k(t) - M_{k-1}(t)||_1 \leq n \cdot C_N^k \frac{N^k}{k!}\ sur\ [-N, N]}$$

On a :

$$\mathrm{||M_k(t) - M_{k-1}(t)||_1 \leq n\frac{(C_N)^k}{k!}}$$

Car $\mathrm{\sum_{0=\infty}^{k} n\frac{(C_N N)^k}{k!} = n \cdot \exp(C_N N)}$ converge

par hypothese la suite $\mathrm{M_k}$ converge uniformement $\mathrm{\lim_{k\to\infty} M_k = \sum_{0=\infty}^{k} (M_k - M_{k-1})}$ sur $\mathrm{[-N, N]}$

On a $(\forall \mathrm{k})$ $\mathrm{M_k'(t) = A(t)M_{k-1}(t) \underset{k\to\infty}{\to} A(t)M(t)}$

donc la suite $\mathrm{M_k'}$ *converge uniformement, donc on peut échanger lim et dérivé, et on obtient M'(t) = A(t) M(t)* ☐

Theoreme : - $\forall \mathrm{v} \in \mathbb{C}^n \exists! \ \mathrm{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$

tq y(0) = v et y'(t) = A(t)y(t)

On a y(t)=M(t)v

Preuve : - vérifions que y(t) :=M(t)v est une solution

$$\begin{aligned} \mathrm{y'(t)} &= \mathrm{M'(t)v = A(t)M(t)v = A(t)y(t)} \\ \mathrm{y(0)} &= \mathrm{M(0)v = 1v = v} \end{aligned}$$

L'unicité de y : -

Supposons que M(t) est inversibl

$\forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}$ (a montrer plus tard) :

Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ on pose $z(t) = M^{-1}(t)y(t)$

cad : $y(t) = M(t)\ z(t)$ On a :

$$\begin{aligned} y'(t) &= M'(t)z(t) + M(t)z'(t) \\ &= A(t)\underbrace{M(t)z(t)}_{y(t)} + M(t)z'(t) \\ &\overset{!}{=} A(t)y(t) \quad M(t)z'(t) = 0 \\ \text{donc} \quad & z'(t) = 0 \text{ donc } z \in \mathbb{C}^n \text{ est une constante} \end{aligned}$$

Pour montrer que $M(t)$ est inversible :

$M(0) = 1$ iversible

Supposons que $\exists t > 0$ tq :

$M(t)$ n'est pas inversible, et soit

$t_0 = \inf_{t>0}\{t|\ \det M(t) = 0\}$

Soit M'(t) une solution de $M'(t_0) = 1$

M

5 Fonction de plusieur variables

probleme typique : trouver les maxs et mins locaux de $f(x,y)=x^2y+xy+y^3$

5.1 La différentielle et les dérivé partielles

On va étudier des fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f & \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^l \\ & \| & & \| \\ & V & & W \end{array}$$

ou plus généralement $f : U \to W$ (ouvert $\subset V$)

Définition : - Si $a \in U$ $v \in V$, alors la dérivée directionnelle :

$$\partial_v f(a) := \left(\frac{d}{dt} f(a+tv)\right)|_{t=0}$$

Si $x_1, ..., x_k$ sont les coordonné sur $V=\mathbb{R}^k$ et si $e_1, ..., e_k$ est la base canonique de $V=\mathbb{R}^k$ alors la dérivé partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{ei} f(a)$$

Remarque : - Comment calculer $\frac{\partial f}{\partial_{xi}}$?

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_k) &= \tfrac{d}{dt} f(x_1, x_2, ..., x_i + t, x_{i+1}, ..., x_k)|_{t=0} \\ &= \textit{la dérivé de f par } x_i \textit{ si les autres variables sont vues comme des constantes} \end{aligned}$$

Exemple : - $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = \sin(x+y+xy)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x+y+xy) \cdot (1+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x+y+xy) \cdot (1+x) \end{aligned}$$

Remarque : - Si $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$

c a d si $f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$ $f_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

Définition : -

$f : U(\subset V) \to W$ est diférentiable en $a \in U$ si il existe une fontion linéaire $d_a f : V \longrightarrow W$ (appellé diferentielle de f en a$\in$ U) tq ($h \in V$)

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$$

explication de $o(||h||)$:

on a : $f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + R(h)$

on écrit : que $R(h) = o(||h||)$ si "R est négligeable par rapport a $||h||$" cad si :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R(h)}{||h||} = 0$ cad si $R(h) = ||h||\ v(h)$ et r(0)=, v continue en 0

Exemple : -

si V=W=$\mathbb{R}$ f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si f'(a) existe (a$\in \mathbb{R}$) alors $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o(|h|)h \in \mathbb{R}$

Donc $d_a f(h) = f'(a)h$

Proposition : - Si $d_a f$ existe, alors :

$$\partial_v f(a) = d_a f(v)$$

Preuve : -

$$\begin{aligned}\partial_v f(\alpha) &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tc) - f(\alpha)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{d_a(f(tv) + o(|t|\lfloor|v||)}{t} = d_a f(v) + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{o(|t|)}{t}}_{=0} \qquad \square\end{aligned}$$

en particulier $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = d_a f(e_i)$ car $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{ei} f(a)$

Proposition : - Si $d_a f$ existe, alors :

$d_a f(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} v_i$ (ici v=$\sum v_i e_i,\ v_i \in \mathbb{R}$)

Preuve : - $d_a f(v) = d_a f(\displaystyle\sum_i v_i e_i)$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{k} v_i\ d_a f(e_i) = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(e_i) \quad \square$

Si : f : $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, alors la matrice de $d_a f$ est :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)$$

Si f :$\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} \qquad (f_j : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R})$$

alors la matrice de $d_a f$ est : $\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{pmatrix}$

Définition : - f est C^1 si :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \textit{sont des fonctions continues}$$

Théoreme : - Si $f : U(\subset V) \longrightarrow W$

est C^1 alors f est différentiable partout, cad $d_A f$ existe $\forall a \in U$

Preuve : - plus tard

Proposition : - Si f est différentiable en $a \in U$ (cad si $d_a f$ existe) alors f est continue en a

Preuve : -

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + d_a f(h) + o(||h||) \\ \lim_{h \to 0} &= f(a) + 0 + 0 = f(a) \qquad \square \end{aligned}$$

f est C^1 $\Rightarrow$ *f est différentaible*($\Rightarrow$ *f est continu*) $\Rightarrow$ $\partial_v f$ *existe* $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *existe*

les autre implication ne sont pas vraies

Exemple : -

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r & \cos\varphi \\ r & \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ La matrice de df est :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

(f est C^l $\Rightarrow$ f est différentiable)

Exemple : - Si f :V$\to$ W est linéaire, alors f est différentiable et ($\forall a \in V$) ; $d_a = f$
car f(a+h) = f(a) + f(h)
En particulier, les coordonnées $x_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \to X_i$$

Est linéaire $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$:

$$\mathrm{d_a x_i(h) = h_i} \quad (\text{ou } \mathrm{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix})$$

La matrice de $\mathrm{d_x X^1}$ est : (0,...,0,1,0,...,0)

Proposition : - Si $\mathrm{d_A f}$ existe alors :

$$\mathrm{d_A f} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial k_i}(a)\ \mathrm{d_a X_i}$$

Preuve : - il faut montrer $\forall k \in \mathbb{R}^k \quad \mathrm{d_a f(h)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \underbrace{\mathrm{d_a x_i(h)}}_{h_i}$ □

Exemple : - f :$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:
$f(x,y) = \sin(x+y+xy)$
$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \cos(x+y+xy)/(1+y)dx + (1+x)dy$

Définition : - Si f :$\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable alors a$\in \mathbb{R}^k$ est un point critique si :

$$\mathrm{d_a f} = 0 \qquad (\text{cad } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0\ \forall i)$$

Proposition : - Si a est un extremum local de f alors a est un point critique

Preuve : - Si a est un extremum local et si g(t) := f(a+tv)
$(v \in \mathbb{R}^k)$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alors 0 est un extremum local de g, donc : $\frac{d}{dt}g(0) = 0 := \partial_v f(a)$
On a donc $\partial_v f(0) = 0 \quad (\forall v) \Rightarrow \mathrm{d_a f} = 0$ □

Théoreme : - Si f :$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ est C^1 alors f est différentiable

Preuve : - si f=$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$ $f_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

alors il suffit de montrer le théoreme pour les $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, donc on peut supposer que $l = 1$
Pour simplifier on suppose k=2 Soient a$\in \mathbb{R}^2$ h$\in \mathbb{R}^2$:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 e_1 + h_2 e_2$$

f(a+h)-f(a) = f(a+h_1e_1) $-$ f(a) + f(a+h)-f(a+h_1e_1)
On utilise le theoreme des acroissement finis :

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &:= f(a + t \cdot e_1) \\
g_1(h_1) - g_1(0) &= h_1 g_1'(s_1) = h_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underbrace{a + s_1 e_1}_{b_1}) \ s_1 \in [0, h_1] \\
f(a + h_1 e_1) - f(a) & \\
g_2(t) &= f(a + h_1 e_1 + t e_2) \\
f(a+h) - f(a + h_1 e_1) &= g_2(h_2)_2(0) \\
&\overset{TAF}{=} h_2 g_2'(s_2) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underbrace{a + h_1 e_1 + s_2 e_2}_{b_2}) \\
f(a+h) - f(a) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_2) \\
&= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \boxed{h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)} + \boxed{h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(b_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)}
\end{aligned}
$$

$o(||h||), o(||h||)$

Mais $\lim\limits_{h \to \infty} \frac{h_1}{||h||} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right) = 0$

Theoreme : - (regle de la chaine)

Soients : $\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^l & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^n \\ a & \longrightarrow & b & \longrightarrow & c \end{array}$ Supposons que $d_a f$ et $d_b g$ existent.

Alors $d_a(g \circ f) = d_b g \circ d_a f$

(la lineaire de la composition est la composition des linéarisations)

Preuve : -

$g(f(a+h)) = g(\underbrace{f(a)}_{b} + d_A f(h) + o(||h||)$

$= \underbrace{g(f(a))}_{g(b)} + \underbrace{d_b g(d_a f(h))}_{d_a(g \circ f} + \underbrace{d_b g(o(||h||)}_{o(||h||)} + o(||d_a f(h) + o(||h||)||)) \quad \square$

Remarque : - Comment calculer les dérivées partielles avec les règle de la chaine :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

La matrice de $d_a f$ est $\left(\frac{\partial y_q}{\partial x_r}\right)_{q,r}$

Exemple : -

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 x_2 \end{pmatrix} \to z = \sin(y_1 + y_2)$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

On a :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1}$$

$= \cos(y_1 + y_2) \cdot 1 + \cos(y_1 + y_2) \cdot x_2$
$= \cos(x_1 + x_2 + x_1 x_2) \cdot (1 + x_2)$

Remarque : - On peut écrire la regle de la chaine comme :

$$\boxed{d\ z_p = \sum_{q=1}^{l} \frac{\partial z_p}{\partial y_q} dy_q \quad = \quad \sum_q \frac{\partial z_p}{\partial y_q} \cdot \underbrace{\frac{\partial y_q}{\partial x_r}\, dxr}_{dyq}}$$

5.2 Dérivé partielle supérieures

On pose :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \text{ etc}$$

Définition : - f : $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ est C^n

si toutes les n-ieme dérivié partielle de f existent et elles sont continues

Theoreme : - Si f : $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ est C^2 alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Preuve : - On peut supposer que l=1

(si f=$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$ il suffit de montrer le theoreme pour les fi)

L'idée : aproximer les dérivé par des différences :

Si $v \in \mathbb{R}^k$ on pose : $\Delta_v f)(x) := f(x + v) - f(x)$

$\Delta_v f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

Si $v_1 w \in \mathbb{R}^k$ alors :

$$\Delta_v(\Delta_w f)(x) = \Delta_w(\Delta_v f)(x)(*)$$

on va montrer : $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta_{t\ ej}\Delta_{t\ ei} f}{t^2}(t)$

Pour montrer (t) on utilise TAF

On pose : $g(t) = f(a+te_i)$

$g(t) - g(0) \overset{TAF}{=} tg'(\tilde{t}) \qquad \tilde{t} \in [0, t]$

$=t\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(a + \tilde{t}e_i)$

On a donc : $\displaystyle\frac{\Delta_{t\ ej}(\Delta_{t\ ei} f)(a)}{t^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta_{t\ eif)(a+\tilde{t}e_j}}{t} = \frac{\Delta_{t\ ei} f)(a + \tilde{t}e_j}{t} = \frac{\Delta_{t\ ei}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + \tilde{t}e_j}{t} =$
$\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \tilde{t}e_i + \tilde{\tilde{t}}e_j) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \qquad \square$

Corrolaire : - Si f est C^n alors les n-ieme dérivée partielle ($\forall m \leq n$) ne dépend pas de l'ordre

Par ex :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial t} = \frac{\partial^3}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

Rappel : - Regle de la chaine :

- $$\frac{\partial z_k}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial z_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \textit{si f est } C^2$$

Théoreme : - (Taylor d'ordre 2)

Si : f :$\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^2

alors : $$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x^i} h_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(||h||^2)}$$

Preuve : - on définit :

$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g_n(t) = f(a+th)$ Par Taylor-Lagrange :

$$(*) \qquad f(a+h) = g_h(1) \overset{TL}{=} g_n(0) + g_n'(0) + \frac{1}{2} \cdot g_n''(t_n)$$

ou : $t_n \in [0,1] \qquad g_n(0) = f(a)$

$$g_n'(t) \underbrace{=}_{\text{regle de la chaine}} \frac{\partial f(a+th)}{\partial x^i} \cdot h_i; \quad g_n''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(a+th)}{\partial x_i} h_i\right) = \frac{\partial^2 f(a+th)}{\partial x_i \partial x_j} h_i \cdot h_j$$

$(*)$ nous donne :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+t_n h)}{\partial x_i \partial x_j} h_i \cdot h_j$$

<u>Finalement</u>

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a+t_n h)}{\partial x_i \partial x_j} h_i \cdot h_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i \cdot h_j + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f(a+t_n+h)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)}_{\substack{\to 0 \text{ quand } h \to 0 \\ \text{car f est } C^2}} h_i \cdot h_j}_{=o(||h||^2)}$$

□

Rappel : - si f :$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ a un extremum local en a$\in \mathbb{R}^k$ alors $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$, donc :

$$f(a+th) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i \cdot h_j}_{\substack{\text{polynome quadri en} \\ (h_1,\ldots,h_k)}} + o(||h||^2)$$

5.3 Formes quadratiques

une forme quadratique en variables $x_1, ..., x_k$ = un polynôme quadr homogène :

$$q(x_1, ..., x_k) = \sum_{i,j=1} kb_{ij}x_ix_j, \quad B_{ij} \in \mathbb{R}$$

On peut supposer que $B_{ij} = B_{ji}$ si B est la matrice k×k avec les éléments B_{ij}

alors $q(x) = x^TBx$ ou $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$

Exemple : - $q(x_1, x_2) = x_i^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

est ce que $q_1(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$?

Réponse compléter les carrés :

$q(x_1, x_2) = ...(x_1 + 3x_2)^2 - 4(x_2)^2 = (y_1)^2 - (y_2)^2$ ou $y_1 = x_1 + 3x_2,; \quad y_2 = 2x_2$
La réponse est non $(e \cdot g \cdot y_1 = 0; \quad y_2 = 1; \quad y_2 n \rightsquigarrow q = -1)$

Théoreme : - Si $q(x_1, ..., x_n)$ est sous forme quadratique
alors ∃ changement de base tq : $q = \underbrace{(y_1)^2 + ...(y_{n+})^2}_{n+} - \underbrace{(y_{n+1})^2 - ... - (y_{n+n-})^2}_{n-}$

Méthode compléter les carrés : et $x_1, x_2 = (\underbrace{y_1 + y_2}_{x_1})(\underbrace{y_1 - y_2}_{x_2}) = (y_1)^2 - (y_2)^2$

Définition : - Si V est un corps vectoriel réel (ou sur un corps K),
alors une forme bilinéaire symétrique sur V est une application :

$B : V \times V \to \mathbb{R}(\text{ou} \to K)$ tq :

- $B(u, v) = B(v, u) \quad \forall u, v \in V$
- $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w) \quad \forall u, v, w \in V \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou K)

Exemple : - produit scalaire = forme sym bilinéaire tq :
$B(v, w) > 0 \quad \forall v \neq 0$

Si $e_1, ..., e_n$ est une base de V on pose : $B_{ij} = B(e_i, e_j) \in \mathbb{R}$

Si $u = \sum_{i=1}^{n} u_ie_i; \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_ie_i \quad u_i, v_i \in \mathbb{R}; \quad$ alors $B(u, v) = B\left(\sum_{i=1}^{u} u_ie_i, \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot e_j\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} u_iv_j \, B(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} B - i, ju_iv_j.$$

Si B est la matrice avec les éléments B_{ij} alors B(u,v)=$u^T Bv$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice B est symétrique car $B_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = B_{ji}$

On a donc une bijection entre les formes symétrique bilinéaire et les matrices symétrique $n \times n$ (si une base estt choisi)

Définition : - La forme quadrqtique q associé a une forme biliné ;
sym(B) est q(v) :=$B(v, v)$ Avec les matrices :

$q(v) = v^T Bv = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} v_i v_j$

Exemple : - Si B(u,v) = u · v (V=$\mathbb{R}^n$) alors q(v) = v · v = $||v||^2$

Remarque : - On peut calculer B à partir de q :

$$q(u + v) = B(u + v_1, u + u) = \underbrace{B(u, u)}_{q(u)} + \underbrace{B(v, v)}_{q(u)} + 2B(u, v)$$

Donc : B(u,v) = $\dfrac{q(u + v) - q(u) - q(w)}{2}$

<u>Si une base est choisi</u> : B(u,v) = $u^T Bv$

<u>Si on change la base</u> : Si Q est la matrice de changement de base :

$v_{new} = Q^{-1} v; \quad u^T_{new} = (Q^{-1}u)^T = u^T (Q^{-1})^T$

Et on veut :

$$\underbrace{u^T_{new}\ B_{new}\ v_{new}} \stackrel{!}{=} u^T Bv = u^T_{new} \boxed{(Q)^T B\ Q}^{B_{new}}\ v_{new}; \quad (v = Q\ v_{new}\ u = Q\ u_{new})$$

Changement de la base $\boxed{B \rightsquigarrow Q^T BQ}$

Théoreme : - Si P est une matrice symétrique n×n réelle, alors ∃ matrice n× n Q inversible tq :

$Q^T BQ$ est diagonaleavec $\pm 1, 0$ sur la diagonale :

cad ∀ forme quadratique q ∃ une base tq :

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i)^2; \quad c_i \in .\{+1, -1, 0\}$$

Rappel : - ∃ Q tq $Q^T = Q^{-1}$ (cad Q est orthogonale) tq $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

(∃ vecteur propre de B qui forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$)

Rappel : - forme quadratique : $q(x_1,...,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{i,j}x_i \cdot x_j = x^T B \cdot x$

Si on change la base de $\mathbb{R}^n$ $B \rightsquigarrow Q^T BQ$ (Q la matrice du changement de base)

Preuve/algorithme : - on utilise consécutivement des matrice Q élémentaires, cad on applique des opérations élémentaire sur les lignes de B et (les même opération) sur les colones

<u>cas 1</u> $B_{11} \neq 0$ et si $B_{1i} \neq 0$ $(i \neq 1)$:
On fait : $l_i \to l_i - cl_1$ avec $c = B_{1i}/B_{11}$ pour que $B_{1i} \rightsquigarrow 0$
il faut aussi appliqué $c_i \to c_i - cc_1$

Exemple : -

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \to c_2 - 2c_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>cas 2</u> $B_{11} = 0$ $B_{1i} \neq 0$ on peut faire :
$l_1 \to l_1 + l_2$, $c_1 \to c_1 + c_2$ *et on est dans le cas 1*

Exemple : -

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_1 \to l_1 + l_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 \to c_1 + c_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Algorithme</u>

B=

⊛	o	o	o	o
o	⊛	o	o	o
o	o	⊛	o	o
o	o	o	⊛	o
o	o	o	o	⊛

Exemple : -

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 3l_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 2c_1 \\ c_3 \to c_3 - 3c_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \to$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (x_1)^2 - (x_2)^2 + (x_3)^2$$

finalement on fait : $l_i \to \alpha_i l_i$, $c_i \to \alpha_i c_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ convenable pour que les éléments diagonales sont transformé en ± 1 en 0 $\square$

Terminologie : - Si B est une matrice symétrique et si $\wedge := Q^T BQ$ est diagonale (Q inversible) on pose :

n_+ = # élément > 0 sur la digonale de $\wedge$
n_- = # élément < 0 sur la digonale de $\wedge$
n_0 = # de 0

le triple (n_+, n_-, n_0) est la matrice de B (ou de q)

On dit que : B est définie positive si $n_+ = n, \quad n_- = 0, \quad n_0 = 0$ cad :

$$q(x) = x^T Bx \ > 0 \qquad \forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$

B est définie négative si $n_- = n$ $n_+ = 0$, $n_0 = 0$ cad $q(x) < 0$ $\forall \neq 0$

B est semi défini positive si $n_- = 0$ cad

si $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

(par ex $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2$ est semi def pos

$n_+ = 2, n_- = 0, n_0 = 1$ mais pas def positive)

B est indéfinie si $n_+ > 0, n_- > 0$ cad si $\exists x, y \in \mathbb{R}^n$ $q(x) > 0,\ q(y) < 0$

Remarque : -

- La signature de B est indépendante de Q (preuve $\to$ la série)
- Les formes quadratiques / symétrie bil "existent dans la nature"
- prod seal (dans $\mathbb{R}^n$) est $||\cdot||^2$
- $q(x,y,z,t)=x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ signature $n_+ = 3,\ ; n_- = 1$ $n_0 = 0$

5.4 Extremum locaux et selles

Rappel : - Si f $:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et si en $a \in \mathbb{R}^n$ f a un extremum local alors :

$\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0 \quad (\forall i)$ cad a est un point critique

Taylor : Si f est C^2

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x}(a)}_{\text{la diffrentielle } (d_a f(h)} \quad h_i + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}_{\text{une forme quadratique}}$$

Terminologie : -

$H_a f := \left(\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$ Hessienne de f et $H_a f(h) := \sum \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$

est la forme quadrqtique Hessienne

Théoreme : - Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point critique de f

• $H_a f$ est definie positive (cad $n_+ = n,\ n_- = 0,\ n_0 = 0$)
alors a est un minimum local stricte de f

• si $H_a f$ est def négative, alors *a est un maximum loacal stricte*

• si $H_a f$ est indéfinie (cad si $n_+ > 0,\ n_- > 0$)
alors a n'est pas un extremum local (on dit que a est une selle)

Remarque : - Si $n_+ > 0$ $n_- = 0$ $n_0 > 0$ (semi def positive) alors la théoreme ne dit rien

Preuve : - Si $H_a f$ est définie positive : On change la base de $\mathbb{R}^n$ pour que :
$H_a f(h) = ||h||^2$
$r(h) :=$ le reste dans la formule de taylor qui est $o(||h||2)$

Soit $\varepsilon > 0$ tq $|r(h)|| < \frac{1}{4}||h||^2$

Pour $||h|| < \varepsilon$ on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}||h||^2 + r(h) > f(a) + \frac{1}{4}||h||^2$$

Donc a est un minimum local stricte

• $H_a f$ déf négative - pareil

$$(H_a f(h) = -||h||^2)$$

• si $H_a f$ est indéfinie : on change la base pour que $H_a f$ soit diagonale avec ± 1 sur la diagonale

$H_a f$ est indéfinie $\Rightarrow$ $\exists$ vecteur v,w (on peut choisir de élément dans la base)

tq $||v|| = 1 = ||w||$ et $H_a f(v) = +1$
et $H_a f(w) =$ -1

On a :

$$f(a+tv) = f(a) + \frac{1}{2}t^2 + rcos(tv)$$

$\Rightarrow f(a{+}tv) \geq f(a) + \frac{1}{4}t^2$ aussi : $f(a+tw) \leq f(a) - \frac{1}{4} + t^2$
$\Rightarrow$ a *n'est ni un max ni un min local* $\square$

Proposition : - Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

alors :

B est définie positive ssi $\det B > 0$ et $a > 0$

B est définie négative $\det B > 0$ et $a < 0$

B est indéfinie ssi $\det B < 0$

Preuve : - $\exists Q^T$inversibletq :

$$Q^T B Q = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

ou $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1, -1\} \Rightarrow \det(Q^T B Q) = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ mais aussi

$$\det(Q^T B Q) = \det(Q^T)\det B \det Q = \underbrace{\det(Q)^2}_{>0} \cdot \det B$$

$\Rightarrow \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \mathrm{sgn}(\det B) \in \{1, -1, 0\}$

<u>sens direct</u> : Si B est definie positive alors $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ donc $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ donc $\det(B)\det(Q)^2 = 1$ donc $\det(B) > 0$

<u>sens indirect</u> : On a $\det(B) > 0$ donc $\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$ donc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1$.
Pour lever l'indétermination, calculons la forme quadratique pour un vecteur donnée (choisi specialement) $(1\ 0)B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a \Rightarrow \begin{array}{ll} a > 0 \Rightarrow & \text{B est def positive} \\ a < 0 \Rightarrow & \text{B est def négative}\end{array}$

det B < 0 ssi $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$ ssi B est indéfinie □

Exemple : -

$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$ det B = -1 $\Rightarrow$ indéfinie

$B = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}$ det B = 2, a=1 $\Rightarrow$ déf positive

<u>Comment trouver les extremum locaux d'une fonction f :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$</u> :

- trouver les points critiques $a \in R^n$
  tq $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$ cad $d_a f$
- trouver la signature de $H_a f = \left(\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$

$$\begin{array}{lll} H_a f & \text{def pos} & \Rightarrow \text{min} \\ & \text{déf négative} & \Rightarrow \text{max} \\ & \text{indéfinie} & \Rightarrow \text{selle} \end{array}$$

exemple : - f :$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

<u>point critique</u> :

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y(1 - 2x - y) = 0$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1 - 2y - x) = 0$
<u>les points critiques</u> = $\begin{array}{l}(y = 0 \vee \quad 1 - 2x - y = 0) \wedge \\ (x = 0 \vee \quad 1 - 2y - x = 0)\end{array}$

(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1/3, 1/3)

<u>4 point critiques</u> :

$$Hf = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2y & 1 - 2x - 2y\\ 1 - 2x - 2y & -2x\end{pmatrix}$$

x,y = (0,0) : $Hf\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$\det Hf = -1 \Rightarrow$ indef $\Rightarrow (0, 0)$ est une selle (x,y) = (1,0) : $\quad$ Hf = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ det = -1 $\Rightarrow$ indef $\Rightarrow$ selle

(0,1) indef donc selle

(x,y)=$(1/3, 1/3)$: $\quad$ Hf = $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$ det = $\frac{1}{3}$, $\quad \frac{-2}{3} < 0 \Rightarrow$ déf négativ $\Rightarrow$ max local

5.5 Multiplicateur de Lagrange

Probleme : - Si g :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et si S $\subset \mathbb{R}$ est donné par :

$$\mathrm{S} := \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{F(x)} = 0\} \quad \mathrm{d'ou}$$

F :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est une fonction donnés
On cherche les extremum locaux de g/s : S$\to \mathbb{R}$

exemple : - n=2, k=1
g(x,y) = x+y_1, F(x,y) = $x^2 + y^2 - 1$

$$\mathrm{S} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0\} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \mid \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 1\}$$

Remarque : - g continue S compact $\Rightarrow$ max et min existent

max en (x,y) = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
min en (x,y) = $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
ces 2 points ne sont pas des points critiques de g

Théoreme : - (multipication de Lagrange)

Soit F : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ une fonction C^1 cad F=$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{pmatrix}$, $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction C^1

$$\mathrm{S} := \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{F(x)} = 0\}$$

$$\mathrm{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \textit{ une fonction } \mathrm{C}^1$$

et a$\in$ S tq : g|s a un max ou min en a
Si l'application linéaire $d_aF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est surjective alors $\exists \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ (multiplication de Lagrange) tq a est un point critique de g–$\lambda_1 F_1 - ... - \lambda_k F_k$

Remarque : - g|s = $(g - \lambda_1 F_1 - ... - \lambda_k F_k)|_S$ car $F_i|_S = 0 \quad \forall i$

• pour trouver les extremum de $g|_s$ on cherche $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ et a $\in \mathbb{R}^n$ tq a est un point critique de $g - \sum \lambda_i F_i$

$\to$ les extremum sont parmis ces points a.

d_aF surjective $\Leftrightarrow$ rang (d_aF) = k cad rang $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1..k \\ j=1..n}} = k$

exemple 1 : - n=2 k=1

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \qquad g(x, y) = x + y$$

g-λF $= x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ $\quad$ (ast) $\lambda \in \mathbb{R}$

On cherche les points critiques de $(*)$ qui sont dans

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\frac{\partial(*)}{\partial x} = 1 - 2\lambda x \quad \frac{\partial(*)}{\partial y} = 1 - 2\lambda y$$

$$\begin{array}{ll} 2\lambda x & = 1 = 2\lambda y \\ tq x^2 + y^2 & = 1 \\ & x = y \\ \Rightarrow & x = y = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array}$$

$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $p_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

sont les "extremum potentiel" de $g|_S$ *S compact, g continue* $\Rightarrow$ max et min existent $g(p_1) = \sqrt{2} = \max \quad g(p_2) = -\sqrt{2} = \min$

Indéfinie : -

<u>correction</u>

$$g = x^2 - xy^2$$

(x,y) = (0,0) =a n'est pas un extremum local :

$H_a f \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ signature $n_+ = 1;\ n_- = 0;\ n_0 = 1$

g=x$\cdot(x - y^2)$

Démonstration Théoreme de Lagrange : -

<u>cas 1</u> : $F_1(x_1..x_n) = x_i$ cad :

$$s = \{(x_{1..n}) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = .. = x_k = 0\}$$

alors $g|_S$ $g(\underbrace{0, 0, 0..}_{\text{k fois}}, \underbrace{x_{k+1}, x_{k+2}..x_k}_{n-k})$ est une fonction de n-k variable

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = 0 \quad i = k + 1, k + 2, .., n$

On pose $\lambda_j = \frac{\partial g(a)}{\partial x_j} \quad j = 1..k$; et donc : $\frac{\partial(g - \lambda_1 x_1 - .. - \lambda_k x_k)(a)}{\partial x_m} = 0 \quad m = 1..n$

<u>cas 2</u> général :

l'idéé : $\exists$ un changement de variable tq on se retrouve au cas 1

Lemme : - On pose :

$$\tilde{F_i}\ (x_1,..x_n) = x_i \quad i = 1..k$$

$\exists$ ouvert a$\in$ $U \subset \mathbb{R}^n$, 0$\in$ $v \in \mathbb{R}^n$ et une bijection $\phi : U \to v$ tq $\phi e = t\phi^{-1}$ sont C1 $\phi(a) = 0$ et $F = \tilde{F} \circ \phi$

Preuve : - Analyse 2 (théorme fonction inverse)

On défini $\tilde{g}$ par :

$$\tilde{g} = g \circ \phi^{-1} \quad (g = \tilde{g} \circ \phi)$$

$\tilde{F}, \tilde{g}$... cas1 $\Rightarrow$:

$$\exists \lambda_1..\lambda_k \text{ tq } 0 \textit{est un point critique}$$

de $\tilde{g} - \lambda_1 \tilde{F}_1 - ..\lambda_k \tilde{F}_k$; cad $d_0(\tilde{g} - \sum \lambda_i \tilde{F}_i) = 0$; regle de la chaine :

$$d_a(g - \sum \lambda_i F_i) = d_0 \tilde{g} \circ d_a \phi - \sum \lambda_i \tilde{F}_i \circ d_a \phi \quad = d_a(\tilde{g} - \sum \lambda_i \tilde{F}_i) \circ d_a \phi = 0 \qquad \square$$

Résumer pertie 5 : -

- calculer avec les dériver partielle des différentielles : regle de la chaine
- trouver les extremum d'un fonction points critiques matrice Hesienne signature multiplicateur de Lagrange

6 Intégrale multiples

6.1 Motivation

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ $f: A \to \mathbb{R}$; $\int_b f(x_1..x_n) dx_1..dx_n =$

Comment définir $\int_A f \; dx_1..dx_n$?

$\approx \sum_{R \subset A} f(p \in \mathbb{R})$ aire(R) rectangle dans la division et on prend la limite

6.2 Définitions

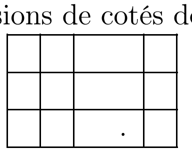
Définition : - Un pavé (rectangle n-dim) dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de la forme :

$$P = [a_1 b_1] \times [a_2 b_2] \times ... \times [a_n b_n] \quad a_i b_i \in \mathbb{R}$$

Le volume de P est $\text{vol}(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Définition : - Une divison d'un intervalles fermé [a,b] = un choix de points $a < c_1 < c_2 < .. < c_k < b$

Une division d'unpavé $P \subset \mathbb{R}^n$ = une décomposition de P en sous-pavés qui est donné par divisions de cotés de P.

n=2 

Un rafinement d'une division D = une division D' obtenue de D en ajoutant de nouveau points de division

Proposition : - Si P est un pavé et D une divison de P alors vol P $= \sum_{R \in D}$ vol R

preuve : - (pour n=2)

$P = [a,b] \times [c,d] \qquad a = t_0 t_1 .. t_2 .. t_{k-1} t_k = b$

vol(P) = (b-a)(d-c) $= ((t_k - t_{k-1}) + (t_{k-2} - t_{k-2}) + .. + (t_1 - t_0))$.

- $((s_l - s_{l-1}) + ... + (s_1 - s_0)) = \sum_{i,j} (t_i - t_{i-1}(s_j - s_{j-1} = \sum_{R \in D} \text{vol } R \quad \square$

Définition : - Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé D une division de P et $f: P \to \mathbb{R}$ est une fonction borné alors la sommr de Rieman supérieur de f est $S(f,D) := \sum_{R \in D} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot \text{vol}(R)$

<u>La somme de Rieamn inférieur</u> est $s(f,D) = \sum_{R \in D} \inf_{x \in R} f(x) \cdot \text{vol}(R)$

<u>observation</u> S(f,D) = s(f,D)

Lemme : - Si D' est un rafinement de D, alors S(f,D') $\leq S(f,D)$ et s(f,D')$\geq s(f,D)$

Preuve : - S(f,D) $= \sum_{R\in D} \sup_{x\in R} f(x)\cdot vol(R) = \sum_{R\in D} \sup_{x\in R} f(x)\cdot \sum_{\substack{R'\in D'\\ R'\in R}} volR'$

$= \sum_{R'\in D'} \sup_{x\in R} f(x)\cdot vol\ R'$ (ou $R\in D$ est tq R' $\subset$ R)

$\to \sum_{R'\in D'} \sup_{x\in R'} f(x)\cdot vol(R') = S(f,D')$

Pour s(f,D') $\geq s(f,D)$: pareil $\square$

Proposition : - Si D_1 et D_2 sont des division d eP alors $S(f,D_1)\geq s(f,D_2)$

Preuve : - Si D' est un rafinement commun de D_1 et D_2 alors :

$$S(f,D_1)\geq S(f,D')\geq s(f,D')\geq s(f,D_2) \quad \square$$

Définition : - Si P$\subset \mathbb{R}^n$ est pavé, f :P$\to \mathbb{R}$ une fonction borné alors
<u>l'intégrale de Riemann supérieur</u> de f par P est :

$$\overline{\int}_P f dx_1..dx_n := \inf S(f,D) \quad \textit{D division de P}$$

<u>l'intégrale inférieur</u> est

$$\underline{\int}_P f \ \ dx_1..dx_n \quad := \sup s(f,D)$$

(par la proposition, $\overline{\int}_P f \geq \underline{\int}_P f$)

Si $\overline{\int}_P f = \underline{\int}_P f$, on dit que f et intégrable, et son intégrale est :

$$\int_P f := \overline{\int}_P f = \underline{\int}_P f$$

Définition : - Si A $\subset \mathbb{R}^n$ est borné, donc $\exists$ pavé P$\subset \mathbb{R}^n$ tq A$\subset$ P et si f :A $\to \mathbb{R}$ est une fonction borné, alors :

$$\int_A f := \int_P \bar{f} \quad \text{ou } \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in A \\ 0 & \text{si } x\notin A \end{cases}$$

Remarque : - Le résultat ne dépend pas du choix de P (exercice)

Propriété : - $\int_A f$

- $\int_A (af + bg) = a\int_A f + b\int_A g$

  Si a,b $\in \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ tq $\int_A f$ et $\int_A g$ existent

- Si $f \leq g$, alors :
  $\int_A f \leq \int_A g$

Théoreme : - si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé et si f :P$\to \mathbb{R}$ est continue alors $\int_P f$ existe.
Plus généralemnt. si f :P$\to \mathbb{R}$ est borné et si :
$\{x \in P \mid f$ n'est pas continu en $x\}$ est négligeable, alors $\int_P f$ existe

Définition : - Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné alors $vol(A) := \int_A 1$
A est négligeablz si vol(A) = 0. cad si $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ pavé $P_1, ..., P_k$ tq :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i \quad \sum_{i=1}^{k} volP_i \quad \leq \varepsilon$$

Preuve du théoreme : - plus tard

Proposition : - Si $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est fermé et borné, et si $g : S \to \mathbb{R}$ est continue alors le graphe de g :

$$\{(x, g(x))) \in \mathbb{R}^n \mid x \in S\} \qquad \textit{est un ensemble négligeable}$$

Preuve : - plus tard

Exemple : -

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Alors $\int_D 1$ existe car :

$$\int_D 1 = \int_C \bar{f} \text{ (C carré } |x| \leq 1, |y| \leq 1) \qquad x_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

Les discontinuité de X_D = le cercle $\{x^2 + y^2 = 1\}$

le cercle est l'union de 2 graphes $\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \\ y = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

on utilise :
Si A,B $\subset \mathbb{R}^n$ sont négrligeable alors A$\cup$B est négliegeable

$\Longrightarrow$ le cercle est négligeable $\Longrightarrow \int_D 1$

6.3 Intégrale itérées

Théoreme : - Si $P = [a_1, b_1]x..x[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ $P \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\int_P f\ dx_1..dx_n = \int_{an}^{bn} \left(\int_{a2}^{b2} \left(\int_{a1}^{b1} f(x_1..x_n) dx_1 \right) dx_2 \right) dx_n$$

Si l'intégrale itéré $(*)$ existe

Exemples : -

$$\int\limits_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\ dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y\ dy = \frac{1}{4}$$

explication : - comment calculer $\int_A f\ dx_1..dx_n$

n=3 volume de $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} := B$ intégrons d'abord par z :

$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq e \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\int_B 1\ dxdydz = \int_D 2\sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy = ...$$

Preuve du Théoreme : -

$P=[a_1 b_1]x..x[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ f :$P \to \mathbb{R}$ intégrable

On a : $P=[a_1 b_1]xP'$ ou $P' = [a_1 b_2]x..x[a_n b_N] \subset \mathbb{R}^{n-1}$

On pose :

$$g(x_1..x_n) := \int_{a_1}^{b1} f(x_1..x_n) dx_1$$

Supposons que g est bine définie
Il faut montrer que :

$$\int_P dx_1..dx_n = \int_{P'} g\ dx_2...dx_n$$

(et que $\int_{P'}$ existe)

Soit D une division de P cad une division $a_1 \leq t_1 < t_2 < .. < t_n = b$
une division D' de P'

Montrons que

$$S(f, D) \geq S(g, D') \geq s(g, D') \geq s(f, D)$$

Si on le suppose : $\overline{\int}_p f \geq \overline{\int}_{P'} g \geq \underline{\int}_{P'} g \geq \underline{\int}_P f$

mais $\overline{\int}_P f = \underline{\int}_P f = \int_P f$ $\Rightarrow$ les $\geq$ *sont en fait* $=$

$\Rightarrow \int_{P'} g$ existe et $\int_{P'} g = \int_P f$

Pour montrer (1) :

$$g(x_2..x_n) = \int_{a1}^{b1} f(x_1..x_n)dx_1 = \sum_{i=1}^{N} \int_{ti-1}^{ti} f(x_1..xn)dx_1$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{i-1}) \cdot \sup f(x_1..x_n) \quad x_i \in [t_i, t_{i-1}]$$

Donc $S(g, D') = \sum_{R' \in D'} \sup_{R'} g \cdot \mathrm{vol}R' \leq \sum_{R' \in D'} \cdot \sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{t-1}) \cdot \sup_{[t_i, t_{i-1}]} f \cdot \mathrm{vol}R'$

$= \sum_{R \in D} \sup_{R} f \cdot \mathrm{vol}\, R = S(f, D)$

$(R{=}[t_{i-1}, t_i] \times R')$

Pour (2) pareil $\square$

6.4 Changement de variable

<u>Intuition</u> $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

si on veut calculer : $\int_D f(x, y)\, dx\, dy$ *en place d'une division*

$$\int_D f(x, y)dx\, dy = \int_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} f(r\cos\varphi\; r\sin\varphi)r\, dv\, d\varphi$$

Théoreme : - (changement de variable) :

Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé $(*)$:

$P \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ou $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, $g : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 qui est injective dans l'intérieur de P, et $f : g(P) \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors :

$$\int_{g(P)} f = \int_P f \circ g \cdot |\det(dg)|$$

en coordonnées : $y{=}(y_1..y_n)$; $x = (x_1...x_n)$

$$\int_{g(P)} f(y)\, dy_1...dy_n = \int_P f(y(x)) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right| dx_1...dx_n$$

$g : x \to y(x)$ "$dy_1...dy_n = \left|\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right| dx_1....dx_n$"

$(*)$ *en place d'un pavé on peut utiliser n'importe quel sous-ensemble admissible* $(*)$

Exemple-coordonné polaires : -

calculons $\int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)dx\, dy$ $\quad g : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\underset{\text{fonction } C^1}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$

On chercher un rectangle : $P \subset \mathbb{R}^2$ tq $g(P) = D$

$P = \begin{pmatrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}$ $g|_{l'\text{int de P}}$ est une application injective

La matrice de dg : $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\det = r \implies \int_D (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{\substack{0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} ((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2) r\, dr\, d\varphi$$

- $\displaystyle\int_{\substack{0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} r^3\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}$

Exemple : volume de cône : - $\left(r = \sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$= \int_D (1-r)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\substack{0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi}} (1-r)\cdot r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 (r-r^2) dr = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Terminologie : -

La fonction det(dg) =

$=\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ *est le jacobien (ou le déterminant jacobien) du changement de variable)*

Exemple : - coordonné sphériques dans $\mathbb{R}^3$

$\begin{cases} z = & r\cdot\cos\theta \\ x = & r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = & r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ il faut calculer le jacobien cad det dg

Le jacobien de r,$\theta, \varphi \to x, y, z$

La matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cdot\cos\theta\cos\varphi & -v\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$= r^2\sin\theta\cdot\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} = \pm 1,$ *car c'est une matrice orthogonales*

"dessin"

Exemple : - Le volume de la boule de rayon R :

$$P\begin{cases}0 \leq r \leq \mathbb{R}\\ 0 \leq \theta \leq \pi\\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\end{cases}$$

$$\int_{BR} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_P r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$=2\pi \cdot \int_0^R r^2 \, dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \quad = \quad 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Exemple : - Le centre de la masse d'une demi-boule :

$$\int z \quad dx \, dy \, dz \qquad X := \begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\\ z \geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}0 \leq r \leq R\\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\end{cases} \qquad = \int_P \overbrace{r \cdot \cos\theta}^{z} \cdot r^2 \sin\theta \cdot \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$=2\pi \cdot \int_0^R r^3 \, dr \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta}_{\int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}}$$

le centre de k-la masse : $\dfrac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2\pi}{3} \cdot R^3} \quad = \quad \dfrac{3}{8} \cdot R$

L'intégrale de Gauss : -

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x2-y2} \, dx \, dy \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x2} \, dx \cdot \int^{\infty} {}_{-\infty} e^{-y2} \, dy = I^2$$

Coordonné polaires : - $P = \begin{cases}0 \leq r \leq \infty\\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\end{cases}$ $\qquad \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x2-y2} dx \, dy$

$$\int_P e^{-r2} \cdot r \, dr \, d\varphi \quad = \quad 2\pi \cdot \int_0^\infty e^{-r2} \cdot r \, dr \, \Bigg| \begin{matrix} s = r^2 \\ ds = 2r \, dr \end{matrix} \quad = \quad 2\pi \cdot \int_0^\infty e^{-s} \cdot \frac{1}{2} \, ds = \pi$$

Volume d'une boule de dim n préparation fonction Γ

Définition : - Pour $s > 0$ (ou pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 0$)

On pose $\boxed{\Gamma(S) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \, dx}$

Propriété de Γ : -

$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

Preuve : integrer par partie

$$\Gamma(S+1) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-x}}_{u'} \underbrace{x^s}_{v} \, dx \qquad u = -e^{-x}$$

$$= u \cdot v \Big| \begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} + \int \infty_0 e^{-x} \cdot s \cdot x^{s-1} \, dx = s\Gamma(S)$$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$\Gamma(S) = \int_0^\infty e^{-x} \, x^{s-1} \, dx$$

$s > 0$

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(S) \qquad \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = 2 \cdot 1$

$\Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\vdots$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx =$$

$(x = t^2 \quad dx = 2t \, dt)$

$$= 2\int_0^\infty e^{-t2} \, dt \quad = \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-t2} \, dt \quad = \quad \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(5/2) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(7/2) = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

<u>Posons</u> :

$$B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$$

$$\mathrm{vol}_n B_n(R) \quad = \quad \underbrace{(\mathrm{vol}_n \, B_n(1))}_{:=V_n} \cdot \mathbb{R}^n \quad = \quad v_n \cdot \mathbb{R}^n$$

$$\int 1 \, dx_1 ... dx_n \, dt \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x_1^2 - ... - x_n^2) \, dx_1 ... dx_n$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x2} dx_1 .. \int_{-\infty}^\infty e^{-x2} dx_n = \pi^{n/2}$$

$\boxed{t = e^{-r(t)2}}$ *l'integration par* $x_1 ... x_n$ *donne :*

$$\int_0^1 v_n \cdot r(t)^n \, dt \quad = \quad \int_0^\infty v_n \cdot r^n \cdot 2re^{-r2} \, dr$$

$= \ 2v_n \int_0^\infty r^{n+1}e^{-r2} \ dr \quad = \quad v_n \int_0^\infty \ s^{n/2}e^{-s} \ ds \quad = \quad v_n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \ = \ \pi^{2/n}$

$\boxed{v_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}=1\right)}}$

$\Gamma(k+1) = k!$ si $n = 2k$:

$v_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$

$n = 2k+1 \quad \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}+1\right) \quad = \quad \frac{2k+1}{2}\frac{2k-1}{2}...\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} \qquad 2k+1 = 3$

$k = 1 \quad v_3 = \frac{\pi \cdot 4}{3}$ ok

l'idée de la preuve de la formule du changement de variable :

$$\int_{(g(P)} f \quad = \quad \sum_i \int_{g(P_i)} f \quad \approx \quad \sum_i f(g(q_i)) \cdot \mathrm{vol}(g(P_i))$$

<u>Fait</u> Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire $C_n :=$ le cube $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ alors

$\mathrm{vol}_n(T\ C_n) \quad = \quad |\det T|$

Autrement dit : si T est une matrice $n\times n$ alors le volume du parralèlépipède donné par les colones de T est $|\det T|$ etc....

6.5 Propriété élémentaire d l'intégrale

pour montrer que toute fonction continue est intégrable : continuité uniforme

Définition : - Si X,Y sont des espaces métriques et $f : X \to Y$ alorss f est uniformément continue si :

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, x' \in X)(d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon)$$

uniforme .. δ ne dépend pas de $x \in X$

Théoreme : - Si X est compact $f : X \to Y$ continue alors f est uniformement continue

Preuve : - Supposons que f n'est pas uniformement continue cad $(\exists\varepsilon > 0)(\forall n)$

$$\exists x_n, x'_n \in X \qquad \text{tq } d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et } d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$$

X est compact $\to$ remplacon la suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ par une sous-suite convergente. On peut donc supposer que $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe

Donc $d_X(x_n, x'_,) < \frac{1}{n}$ on voit que :

$$\lim_{n\to\infty} x'_n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} x_n$$

f est continue $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{x\to\infty} x_n) \quad = \quad \lim f(x'_n) = f(\lim x'_n)$

c'est possible car : $d_Y(f(x_n), f(x'_n) \geq \varepsilon$ contradiction

Théoreme : - Soient $P\subset \mathbb{R}^n$ un pavé $f : P \to \mathbb{R}$ fonction continue alors f est intégrable (cad $\int_p f$ existe)

Preuve : - P compact $\implies$ f est uniformément continue $(\forall\varepsilon\ \exists\delta...)$ Pour $\delta > 0$ soit D_δ une division de P qui est "$\delta -$ fini" ; $\forall P_i \in D_\delta$; $\forall x_1, x_2 \in P_i\ ||x_1 - x_2|| < \delta$

D_δ est $\delta -$ finie ; $x, x' \in P_i \in D_\delta \implies ||x - x'|| < \delta$; $\implies \sup_{x\in Pi} f(x) - \inf_{x\in P_i} f(x) \leq \varepsilon$

$S(f,D_\delta) - s(f, D_\delta);\quad = \sum_{P_i\subset D_\delta} (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f) \text{vol } P_i \leq \varepsilon \sum_{P_i\in D_\delta} \text{vol } P_i \quad = \quad \varepsilon \cdot \text{vol } P$

cad ; $(\forall\varepsilon > 0)\ \exists D_\delta$ tq

$$S(f, D_\delta) - s(f, D_\delta) \leq \varepsilon \text{ vol } P \implies \inf_D S(f, D) = \sup_D s(f, D) \text{ cad } \int_p f \text{ existe} \qquad \square$$

Théoreme : - Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé et si : $f : P\to \mathbb{R}$ est une fonction bornée tq :

$$A := \{x \in p \mid \textit{ f n'est pas continue en x}\} \qquad \textit{est négligeable}$$

Alors $\int f$ existe

Preuve : - Soit $\varepsilon > 0$ Soient $p_1, ..., p_k$ pavé tq $A \subset UP_i$ et $\sum \text{vol}P_i \leq \varepsilon$

Si $P = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ alors ; $P_0 := (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n) \to$ sous – ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$; Soit D une division de P tq :

$\forall R \in D,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$; on a $||x - y|| < \delta$ cad D est $\delta -$ finie; De plus on suppose que

$\forall R \in D$ soit $R \subset UP_i$; soit : $R \cup UP_i^0 = \emptyset$; $P\backslash \bigcup_{i=1}^{k} P_i^o$ est fermé est borné $\implies f|_{P\backslash UP_i^o}$ est uniformement continue et donc (si δ est bien choisi) on a ; $\forall R \in D$, tq $R \subset P\backslash UP_i$: $\sup_R f - \inf_R f \leq \varepsilon$

On sait aussi que f est borné cad $|f(x)| \leq C \quad \forall x \in P$

$S(f,D) - s(f,D) \quad = \quad \sum_{R\in D} (\sup_R f - \inf_R f) \cdot \text{vol } R \qquad$ Si $R\subset P\backslash UP_i^o$ alors ;

$(\sup_R f - \inf_R f) \cdot \text{vol } R \leq \varepsilon \cdot \text{vol } R$; Si $R \subset UP_i^o$:

$$\sup_R f \leq C \quad \inf_R f \geq -C$$

$\implies (\sup_R f - \inf_R f) \cdot \text{vol } R \leq 2C \cdot \text{vol } R$

$(*) \leq \varepsilon \cdot \text{vol } P \quad + \quad 2c \cdot \varepsilon \qquad$ car $\sum_{i=1}^{k} \text{vol } P_i \leq \varepsilon \qquad \square$

Proposition : - Si $S \subset R^{n-1}$ est fermé et borné et si $f : S\to \mathbb{R}$ est continue, alors le graphe de f :

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in S\} \qquad \textit{est négligeable}$$

Preuve : - S compact, f continue $\implies$ f est uniformement continue cad
$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)$ tq Soit $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un pavé tq ; S$\subset$ P soit D une division
$\delta-$finie de P ; Alors $\forall R \in D$ tq $R \cap S \neq \emptyset$; $\sup\limits_{R\cap S} f - \inf\limits_{R\cap S} f \leq \varepsilon$

Si ; R$\in$ D et si $R_i \cap S \neq \emptyset$; on pose $P_i := R_i \times [\inf\limits_R f, \sup\limits_R f] \subset \mathbb{R}^n$

$\text{vol } P_i = \text{vol}R_i \cdot (\sup\limits_R f - \inf\limits_R f) \leq \text{ vol } R_i..\varepsilon$

On a $A \subset \bigcup\limits_i P_i, \sum \text{vol}P_i \leq \sum\limits_{r\in D} \text{vol } R \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \text{vol } P$

Vu qye εest arbitraire, A est négligeable □

Rappel : - Si A, B sont négligeable alors A$\cup$ B sont négligeable

- A négligeable B$\subset$ A $\implies$ B négligeable

Quels sous-ensemble A$\subset \mathbb{R}^n$ sont "convenable" par l'intégration ?

Définition : - Si X est un espace métrique et si $A \subset X$ alors le bord de A est :

$$\partial A := \{x \in X \mid X_A \textit{ n'est pas continu en } x\}$$

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

cad ; x$\in \partial$A $\forall\varepsilon > 0$
$B(x, \varepsilon) \cap A \neq 0$; $B(x,\varepsilon) \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$

Définition : - Un sous-ensemble borné A$\subset \mathbb{R}^n$ est admissible si $\partial A \subset \mathbb{R}^n$est négligeable
une fonction borné $f : A \to \mathbb{R}$ est admissible si l'ensemble des discontinuité e f est négligeable

Proposition : - Si A est admissible et f :A$\to \mathbb{R}$ est admissible alors
$\int_A$ f existe

Preuve : - Si P est un pavé tq $A \subset P$; on pose (pou x$\in$ P) $\tilde{f}$ (x) $\begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

$$\int_A f = \int_P \tilde{f} \textit{ les discontinuité de } \tilde{f} \subset \textit{Les dicontinuité de } f \cup \partial A$$

$\implies \int_P \tilde{f}$ existe □

Proposition : - Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable et si f :A$\to \mathbb{R}$ est borné alors $\int_A f = 0$

Théoreme : - Si A,B $\subset \mathbb{R}^n$ sont admissible et si f :A$\cup$B $\to \mathbb{R}$ est admissible alors :

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$$